

ETUDE NUMERIQUE DE L'INFLUENCE DE TRANSFERT RADIATIF SUR LA CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE CUBIQUE

A. Abidi*, L. Kolsi, M.N. Borjini, H. Ben Aissia

Unité de Métrologies en Mécaniques des fluides et Thermiques

ENIM Monastir TUNISIE

E-mail: abidiawatef@yahoo.fr

RESUME

Dans ce travail, on considère une étude numérique de l'influence de transfert radiatif sur la convection naturelle à double diffusion dans une cavité cubique soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux pour $Pr = 13.6$, $Le = 2$, $N = 1$ et $Ra = 10^5$ et ceci pour différentes propriétés radiatives du milieu participant. Le formalisme vecteur potentiel- vorticité basé sur la méthode de volume de contrôle est adopté pour formuler et discrétiser les équations gouvernantes le problème. La méthode FTnFVM est choisie pour discrétiser l'équation de transfert radiatif. Les effets du paramètre de couplage conduction- rayonnement et de l'épaisseur optique sur l'écoulement principal, sur le transfert de chaleur et de masse et sur l'écoulement transversal sont analysés.

1. INTRODUCTION

L'étude de la convection naturelle à double diffusion a fait l'objet de nombreux travaux de recherche (Nushimura et al. [1], Beghein et al. [2], Kamakura et Ozoe [3]...). Les applications pratiques correspondantes sont très nombreuses : mouvements convectifs dans les océans, dispersion des polluants dans l'atmosphère, migration d'humidité dans les fibres isolante... Les objectifs principaux de tels travaux sont souvent l'analyse des structures résultantes d'écoulements. Récemment, Sezai et Mohamed [4] ont étudié la convection naturelle à double diffusion tridimensionnelle pour des gradients thermiques et solutal horizontaux opposés. Dans leurs résultats, ils indiquent que l'écoulement doublement diffusif dans les cavités avec les forces de volumes opposées est strictement tridimensionnel pour une certaine rangé des paramètres. La double diffusion et le transfert radiatif existent simultanément dans pas mal des processus de fabrication des cristaux ($LiNbO_3$...). Récemment plusieurs chercheurs se sont intéressés à ces deux phénomènes mais séparément. Tsukada et al. [5] ont accompli une analyse globale du transfert thermique pour la croissance de l'oxyde $LiNbO_3$. Les auteurs ont utilisé l'approximation différentielle P1 pour modéliser le rayonnement dans un milieu émettant gris. Leurs résultats montrent un impact remarquable des propriétés optiques du cristal et de la fonte sur les champs d'écoulement et de température. Koboyachi et al. [6, 7] ont démontré, en adoptant la méthode des ordonnées discrètes S4 pour modéliser le transfert radiatif dans la fonte grise qui absorbe et émet le rayonnement, que le caractère oscillatoire de l'écoulement dépend énormément de l'épaisseur optique du milieu. En adoptant la méthode des ordonnées discrète S4 dans une géométrie non-axisymétrique tridimensionnelle, Jing et al. [8] ont analysé l'effet du rayonnement interne sur la distribution des rais dans une fonte de $LiNbO_3$. Pour une fonte radiativement participante, les rais ont disparu et l'écoulement est devenu stationnaire et axisymétrique. Lan et al. [9] ont employé les approximations P1 et celle de Rosseland pour modéliser le rayonnement interne pendant la formation par la méthode Bridgman du cristal YAG. Une analyse détaillée des études tenant compte

du transfert de chaleur par rayonnement dans la modélisation de la croissance des cristaux a été effectuée par Brandon et Derby[10] et récemment par Müller et Friedrich [11]. En ce qui concerne le couplage rayonnement -convection à double diffusion peu de travaux ont été réalisés. Récemment, Borjini et al.[12] ont étudié le couplage rayonnement -convection à double diffusion mais présence du champ magnétique en 2D. Si les problèmes de convection thermique avec et sans gradient de concentration ont été largement abordés dans la littérature, les travaux où le transfert radiatif intervient sont principalement consacrés à des géométries bidimensionnelles. Une récente étude numérique en 3D, simulant une cavité cubique différentiellement chauffée, a été effectuée, à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes, par Colomer et al. [13]. Ces auteurs se sont intéressés aux effets du nombre de Planck et de l'épaisseur optique sur le transfert de chaleur et donnent une comparaison entre les résultats bidimensionnels et ceux obtenus dans le plan médian d'une enceinte rectangulaire allongée. Borjini et al. [12] se sont intéressés spécialement à étudier l'effet du rayonnement sur l'écoulement transversal en spirales responsable du caractère 3D. A notre connaissance, il n'y a aucuns travaux antérieurs qui ont traités le cas de la convection doublement diffusive dans une cavité tridimensionnelle. Dans cette partie on se propose d'effectuer une étude de l'effet du rayonnement sur la convection naturelle à double diffusion 3D dans une enceinte cubique pour $Pr = 13,6$, $Ra = 10^5$ et pour différentes propriétés optiques du milieu participant.

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE ET TRAITEMENT NUMÉRIQUE

Comme le montre la figure 1, le système physique considéré se compose d'une enceinte cubique de côté W avec des températures uniformes et différentes imposées sur deux frontières verticales opposées alors que toutes les autres parois sont adiabatiques. On assume que toutes ces surfaces sont grises et diffuses. Cette cavité est remplie d'un fluide gris, absorbant, émettant et diffusant isotropiquement le rayonnement. Initialement, le milieu et la boîte sont portés à la température constante T'_c , puis la température de la paroi verticale gauche est portée à une température plus élevée T'_h alors que la paroi verticale droite est maintenue à T'_c .

On suppose que l'écoulement est incompressible et newtonien. Les propriétés physiques du fluide sont supposées constante et l'approximation de Boussinesq est adoptée, Les effets Dufour et Soret sur le transfert de chaleur et de masse sont négligeables.

Comme méthode numérique nous avons eu recours au formalisme fonction de courant vorticité sous une forme vectorielle dans une configuration tridimensionnelle. Le vecteur potentiel et la vorticité sont définies respectivement par les deux relations suivantes : $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ et $\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}$. En introduisant les variables adimensionnelles suivantes : $x = \frac{x'}{L}$, $y = \frac{y'}{L}$, $z = \frac{z'}{L}$,

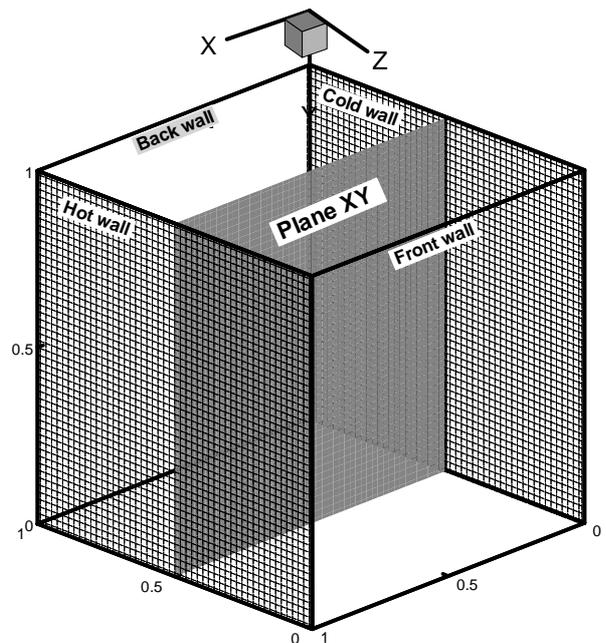


Figure 1 Présentation du modèle

$(u_1, u_2, u_3) = \frac{(u'_1, u'_2, u'_3)L}{\alpha}$, $T = \frac{T' - T'_c}{T'_h - T'_c}$, $C = \frac{C' - C'_c}{C'_h - C'_c}$, les équations adimensionnelles de conservation décrivant les phénomènes de transfert au sein de la cavité s'écrivent sous la forme :

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\phi} = -\bar{\omega} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = \text{Pr} \nabla^2 \bar{\omega} + \text{RaPr} \left(\left[-\frac{\partial T}{\partial z}, 0, -\frac{\partial T}{\partial x} \right] \cdot N \left[\frac{\partial C}{\partial z}, 0, -\frac{\partial C}{\partial x} \right] \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) T = \bar{\nabla}^2 T + \frac{\text{Rc}\tau}{\Phi_t \pi} (1 - \omega_0) \left[\int_{4\pi} \text{Id}\Omega - 4\pi(1 + \Phi_t T)^4 \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) C = \frac{1}{\text{Le}} \nabla^2 C \quad (4)$$

avec $\bar{\omega} = \bar{\nabla} \times \bar{V}$

$$\bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{\phi}$$

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

avec $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$, $\text{Ra} = \frac{g \beta_T (T_h - T_c) L^3}{\nu \alpha}$, $\text{Le} = \frac{\alpha}{D}$, $N = \frac{\beta_c (C_h - C_l)}{\beta_T (T_h - T_c)}$ ou Pr, Ra et Le représentent le nombre de Prandtl, le nombre de Rayleigh et le nombre de Lewis. N correspond au rapport des forces de volume. $\text{Rc} = n^2 \text{WT}_c^3 \sigma / \lambda$ est le paramètre de couplage conduction-rayonnement, $\tau = \kappa W$ est

l'épaisseur optique et $\Phi_t = \frac{T'_h}{T'_c} - 1$ est le rapport de températures. Pour les conditions aux limites hydrodynamiques, on considère que sur toutes les parois les vitesses sont nulles. Les conditions de frontière pour la vorticité sont directement dérivées des conditions de frontière de vitesse. La résolution du système d'équations est effectuée numériquement par la méthode des volumes de contrôle développée par Patankar [14] en adoptant un schéma centré pour le terme de convection. La formulation de l'équation de transfert radiative dans un milieu gris qui absorbe, émet et diffuse isotropiquement le rayonnement et la méthode FTn FVM choisie pour discrétiser cette équation sont détaillées dans Borjini et al.[12]. En effet, la discrétisation angulaire de cette méthode est recommandée pour les situations 3D puisqu'elle réduit l'effet du rayon et l'erreur due à une discrétisation angulaire non-symétrique lors d'une rotation autour des trois axes.

3. RESULTATS ET DISCUSSION

L'effet du transfert radiatif sur les caractéristiques de l'écoulement principal et de l'écoulement tridimensionnel transversal et sur le transfert de chaleur et de masse est discuté pour $\text{Ra} = 10^5$, $\text{Pr} = 13.6$, $\text{Le} = 2$, $\Phi_t = 0.1$, des parois isothermes noirs et des parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes.

3. 1. Effet du rayonnement sur l'écoulement principal

Nous étudierons dans cette section l'influence de paramètre de couplage rayonnement -conduction Rc sur l'écoulement principale, sur les champs de température et de concentration et sur le transfert de chaleur et de masse. Sauf autre indication, les résultats sont donnés pour un milieu semi-transparent gris non-diffusant ayant pour épaisseur optique $\tau = 1$.

En absence du transfert radiatif, un écoulement en 'yeux de chat' est établi (figure 2a). Quand Rc augmente, l'écoulement au centre s'intensifie et uniquement un seul vortex est observé (figures 2c-

d). Ce groupement de deux vortex a été déjà signalé en simulation tridimensionnelle en convection pure (Borjini et al.[12]). Notons que les contours de la projection des lignes de courants dans les plans xy ne sont pas fermés ayant ainsi une forme spirale. Le développement du caractère spiral de l'écoulement est une indication de la tridimensionnalité de l'écoulement.

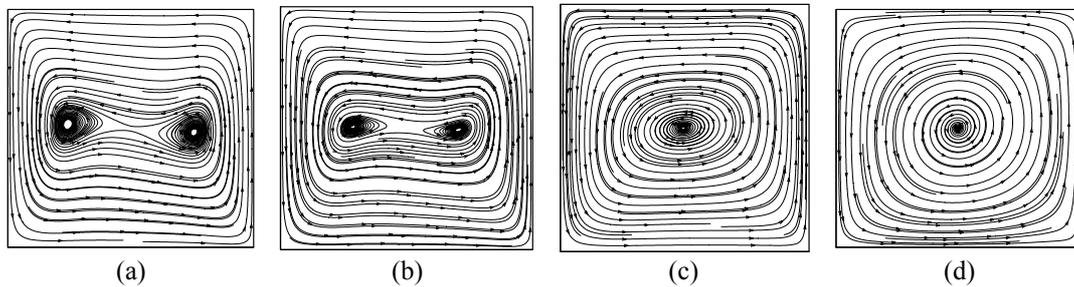


Figure 2 :Projection de la vecteur vitesse sur le plan médian XY pour $Ra=10^5$, $Pr=13.6$, $\tau=1$ et $\Phi_t=0.1$ a) $Rc = 0$ (sans rayonnement), b) $Rc = 1$, c) $Rc = 10$ et d) $Rc = \infty$.

Sur la figure 3 sont représentées les surfaces isothermes correspondantes. Ces surfaces mettent en évidence l'importante réduction de la stratification verticale de la température dans le centre quand le milieu est radiativement participant. Ce redressement des isothermes est dû à l'échauffement par rayonnement du fluide près du sommet de la paroi chaude et près du fond de la paroi froide. On remarque la distribution tridimensionnelle de la température pour $Rc = 0, 1$ et 10 . Toutefois quand $Rc \rightarrow \infty$, le champ de température devient indépendant de l'écoulement et le profil d'un rayonnement pur est obtenu. Ces surfaces isothermes sont quasi-équidistantes sauf près des parois actives.

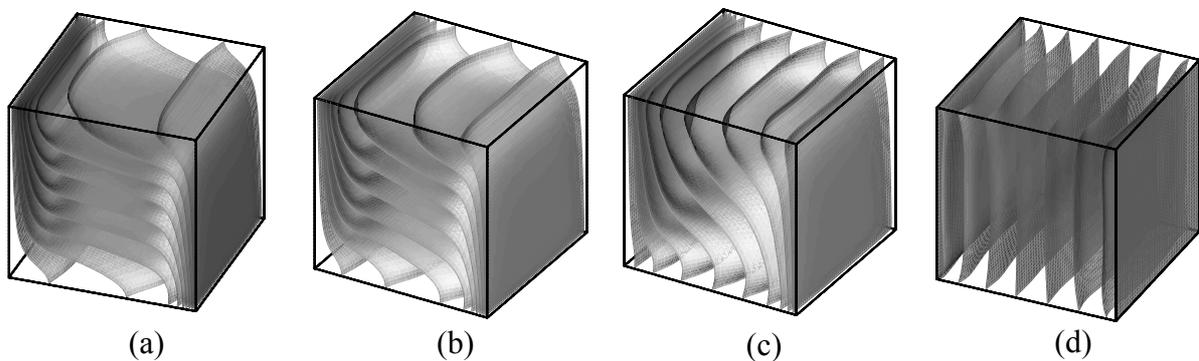


Figure 3: Isothermes pour $Ra=10^5$, $Pr=13.6$, $\tau=1$ et $\Phi_t=0.1$ $N=1$:a) $Rc = 0$ (sans rayonnement), b) $Rc = 1$, c) $Rc = 10$ et d) $Rc = \infty$.

Sur la figure 4 sont représentées les isoconcentrations pour $Rc = 0, 1, 10$ et ∞ . En augmentant Rc , la variation verticale de concentration est limitée aux parties supérieures et inférieures de la cavité alors que la zone centrale est plutôt de concentration uniforme.

Le Tableau 1 résume les effets de l'épaisseur optique et du paramètre de couplage rayonnement – conduction sur le transfert de chaleur à travers les parois actives. La grande dépendance de \bar{q}_r vis-à-vis de τ est aussi retrouvée dans ce tableau. En augmentant Rc , le flux conductif moyen a diminué toutefois, le nombre de Sherwood moyen a augmenté.

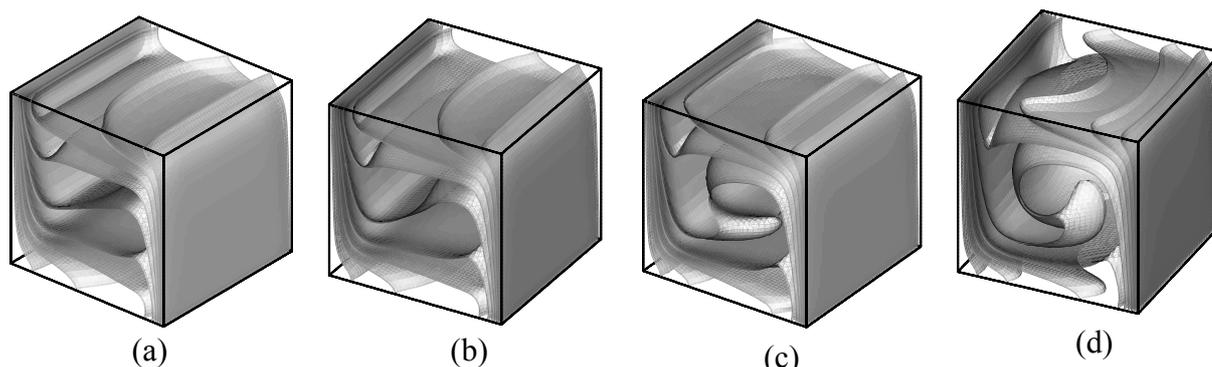


Figure 4 : Iso concentrations pour $Ra=10^5$, $Pr=13.6$, $\tau=1$ et $\Phi_t=0,1$ $N=1$: a) $Rc=0$ (sans rayonnement), b) $Rc=1$, c) $Rc=10$ et d) $Rc=\infty$.

τ	Rc	Paroi chaude			Paroi froide		
		q_c	Sh	$\bar{q}_r Rc/\Phi_t$	q_c	Sh	$\bar{q}_r Rc/\Phi_t$
0.1	0.1	5.333	7.381	0.194	5.350	7.369	0.190
	1	5.267	7.384	2.104	5.318	7.372	2.065
	10	4.803	7.397	19.336	5.082	7.404	19.080
1	0.1	5.302	7.374	0.175	5.332	7.380	0.158
	1	4.983	7.339	1.856	5.137	7.386	1.709
	10	4.324	7.464	17.188	4.887	7.461	16.629
10	0.1	5.325	7.375	0.106	5.343	7.381	0.091
	1	5.185	7.405	1.095	5.324	7.411	0.949
	10	5.13	7.566	7.743	5.802	7.574	7.202

Tableau 1: Effet de l'épaisseur optique et du paramètre de couplage sur le transfert de chaleur pour $Ra=10^5$, $Pr=13.6$, $Le=2$, $N=1$ et $\Phi_t=0,1$.

3.2 Effet du rayonnement sur l'écoulement transverse

τ	Rc	V_{3max}	x_{max}	y_{max}	z_{max}
0.1	0.1	8.624	0.0918	0.9081	0.8469
	1	8.688	0.0918	0.9081	0.8469
	10	9.292	0.8877	0.0918	0.8265
1	0.1	8.684	0.9081	0.0918	0.8469
	1	9.082	0.9081	0.0918	0.8469
	10	11.090	0.8877	0.1122	0.8061
10	0.1	8.709	0.0918	0.9081	0.8469
	1	9.159	0.9081	0.0918	0.8469
	10	11.505	0.8877	0.1122	0.8062
Sans rayonnement		8.616	0.0918	0.9081	0.8469

Tableau 2 : Effet de l'épaisseur optique et du paramètre de couplage sur l'intensité de l'écoulement transverse et sur le lieu de la vitesse transversale maximale pour $Ra=10^5$, $Pr=13.6$, $Le=2$, $N=1$ et $\Phi_t=0,1$.

L'écoulement transversal est une manifestation directe de la nature 3D du mouvement et il est primordial pour étudier l'instationnarité et les transitions. Ce mouvement tridimensionnel est généré

par la présence des parois adhérentes au fluide qui provoquent un effet 3D dit d'inertie et par un autre effet 3D dit thermique dû au gradient de température près des parois latérales.

Le tableau 2 donne, pour quatre valeurs de R_c , les lieux de ce maximum pour un milieu optiquement mince ($\tau=0.1$), intermédiaire ($\tau=1$) et optiquement épais ($\tau=10$). Lorsque R_c augmente, V_{3max} croît pour les trois types de milieu.

4. CONCLUSION

La convection naturelle à double diffusion dans une cavité tridimensionnelle remplie d'un fluide semi transparent a été étudiée numériquement en utilisant le formalisme vorticité vecteur potentiel. Les effets de ces conditions ont été traités pour $Ra=10^5$ $Pr=13.6$ et $Le=2$ pour différentes valeurs de l'épaisseur optique et de R_c . Cette étude a montré que l'augmentation de R_c induit d'une part une diminution de flux conductif d'autre part une augmentation de flux de masse et favorise l'écoulement transversal.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. T. Nishimura, M. Wakamatsu, and A. M. Morega, 1998, Oscillatory Double-Diffusive Convection in a Rectangular Enclosure with Combined Horizontal Temperature and Concentration Gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, 1601.
2. C. Beghein, F. Haghighat, and F. Allard, 1992, Numerical Study of Double-Diffusive Natural Convection in a Square Cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 35, 833.
3. K. Kamakura and H. Ozoe, 1993, Experimental and numerical analysis of double diffusive natural convection heated and cooled from opposed vertical walls with an initial condition of a vertically linear concentration gradient, *Int. J. Heat Mass Transf.* 36, 2125.
4. Sezai I. and A. A. Mohamad, 2000, Double diffusive convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradient, *Phys. Fluids* 12, 2210.
5. T. Tsukada, K. Kakinoki, and M. Hozawa, 1995, Effect of internal radiation within crystal and melt on Czochralski crystal growth of oxide, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 38, pp. 2707-2714.
6. M. Kobayachi, T. Tsukada, M. Hozawa, 1997, Effect of internal radiative heat transfer on the convection in CZ oxide melt, *J. Crystal Growth*, vol. 180, pp.157-166.
7. M. Kobayachi, T. Tsukada, M. Hozawa, 2000, Effect of internal radiative heat transfer on transition of flow modes in CZ oxide melt, *J. Crystal Growth*, vol. 208, pp.459-465.
8. C. J. Jing, A. Hayachi, M. Kobayachi, T. Tsukada, M. Hozawa, N. Imaishi, K. Shimamura, N. Ichinose, Effect of internal radiative heat transfer on spoke pattern on oxide Melt surface in Czochralski crystal growth, 2003, *J. Crystal Growth*, vol. 259, pp.367-373.
9. C. W. Lan, C. Y. Tu, and Y. F. Lee, Effects of internal radiation on heat flow and facet formation in Bridgman growth of YAG crystals, 2003, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 46, pp. 1629-1640.
10. S. Brandon and J. J. Derby, 1991, Internal radiative transport in the vertical Bridgman growth of semitransparent crystals, *J. Crystal Growth*, vol. 110, pp. 481-500.
11. G. M ller and J. Friedrich, 2004, Challenges in modeling of bulk crystal growth, *J. Crystal Growth*, vol. 266, pp. 1-19.
12. M. N. Borjini Mohamed, H. Ben Aissia, K. Halouani et B. Zeghmami, Effect of optical properties on oscillatory Hydromagnetic double-diffusive convection within semitransparent fluid, 2006, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 49, Issues 21-22, pp.3984-399.
13. Colomer, G., Costa, M., C nsul, R., Oliva, A., 2004. Three-dimensional numerical simulation of convection and radiation in a differentially heated cavity using the discrete ordinates method. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 47, 257-269.
14. S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw Hill, New York.