

## CONVECTION MIXTE A PROPRÉTÉS PHYSIQUES VARIABLES AUTOUR D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

M. Ramarozara\*, M. Rakotomalala\*, B. Zeghmati\*\*

\* Institut pour la Maîtrise de l'Energie ( I. M. E.), Université d'Antananarivo B. P. 566, Antananarivo(101), Madagascar ; \*\* Laboratoire de thermodynamique et Energétique, Université de Perpignan, 52, Avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan Cedex, France.

[ramarozara@yahoo.fr](mailto:ramarozara@yahoo.fr)(*Auteur correspondant*), [minoson2002@yahoo.fr](mailto:minoson2002@yahoo.fr) , [zeghmati@univ-perp.fr](mailto:zeghmati@univ-perp.fr)

### RÉSUMÉ

Nous avons étudié numériquement la convection mixte bidimensionnelle autour d'un ellipsoïde en rotation, plongé dans un écoulement ascendant d'air à propriétés physiques variables dans la couche limite. La vitesse extérieure de la couche limite est calculée à l'aide de la méthode des singularités. Les distributions des vitesses et des températures, dans la couche limite, sont déterminées par la méthode aux différences finies et utilisant la méthode de Keller dite « Block elimination » pour résoudre les équations linéaires. Nous avons étudié l'importance de la variabilité des propriétés physiques, et après nous avons procédé à l'étude de la combinaisons des trois convections selon les paramètres qui les caractérisent. Ce qui nous a permis de calculer quelques grandeurs pariétales. La comparaison des résultats pour les trois cas des ellipsoïdes a été effectuée. L'importance de la considération de la variabilité des propriétés physiques de l'air, lorsque la température est élevée, est démontrée.

**Mots clés :** Transfert thermique - ellipsoïde – propriété physique - couche limite – convection mixte

### NOMENCLATURE

#### Lettres Latines

$a, b$	: longueurs des demi axes horizontal et vertical de l'ellipsoïde, m
$B$	: paramètre adimensionnel de rotation
$C_p$	: capacité calorifique massique du fluide, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
$Gr$	: nombre de Grashof thermique
$g$	: accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
$h$	: coefficient de transfert par convection, $W.m^{-2}.K^{-1}$
$L$	: longueur caractéristique ( $L = a$ ), m
$Pr$	: nombre de Prandtl
$r$	: distance radiale, m
$Re_\infty, Re_\omega$	: nombre de Reynolds relatif aux convections forcée et rotatoire
$U, V, W$	: vitesses suivant $x, y$ et $\theta$ , $m.s^{-1}$
$T$	: température du fluide, K

#### Lettres grecques

$\alpha, \beta, \varphi$	: angles, rd
$\beta_t$	: coefficient d'expansion volumique du fluide $\beta_t = 1/T$ , $K^{-1}$
$\rho_e$	: rayon vecteur, m
$\lambda$	: conductivité thermique du fluide, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\mu$	: viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\rho$	: masse volumique du fluide, $kg.m^{-3}$

$\nu_\infty$  : viscosité cinématique du fluide à l'infini,  $m^2.s^{-1}$   
 $\omega$  : vitesse angulaire de la rotation,  $rd.s^{-1}$   
 $\Omega, \Omega'$  : paramètres des convections naturelle et rotatoire

**Indices**

$P$  : paroi  
 $\infty$  : loin de la paroi :

**Exposant**

\* : valeur adimensionnelle

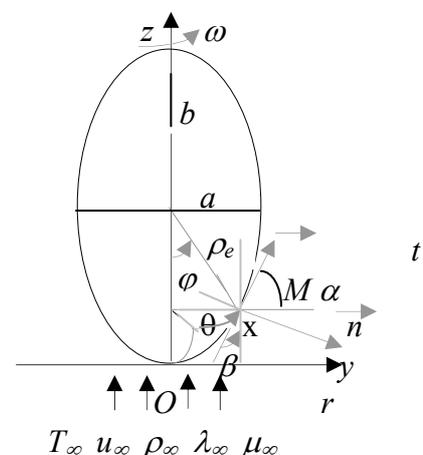
**1. INTRODUCTION**

Les écoulements autour d'un corps font, depuis longtemps, l'objet de travaux scientifiques puisqu'ils interviennent dans de nombreux appareils et processus industriels. En particulier, ils présentent un grand intérêt, dans les opérations industrielles d'obtention de dépôts métalliques en phase gazeuse, si la paroi du corps est à température élevée. De nombreux travaux et publications [1], [2], [3] et [4] ont été déjà effectués concernant les écoulements engendrés par la rotation uniforme de corps à symétrie de révolution. La plus part des auteurs considèrent que les propriétés physiques du fluide sont constantes. Quelques auteurs, [1] et [3] ont déjà étudié des problèmes de propriétés physiques variables dans le cas où le gaz porteur est l'hydrogène. Actuellement, les techniques de dépôts sont très développées dans le laboratoire dans le but d'accélérer la vitesse de dépôts. Dans ce travail, nous considérons un écoulement d'un mélange gazeux, de température  $T_\infty = 25^\circ C$ , constitué par l'air contenant des oxydes métalliques en faibles concentrations. Ce mélange gazeux est destiné à donner un dépôt sur la paroi chaude du solide, ( $T_p = 400^\circ C$ ), après dissociation. Ce qui fait qu'au voisinage de la paroi, les propriétés physiques de l'air deviennent variables. Pour uniformiser l'épaisseur de dépôt, il faut considérer que le solide qui va recevoir le dépôt est en rotation uniforme. Pour obtenir un écoulement axisymétrique, nous considérons que le corps est un ellipsoïde de révolution. L'objectif de ce travail consiste à établir les résultats relatifs aux transferts d'impulsion et de chaleur en convection mixte autour de ce corps. Comme les transferts sont couplés et bidimensionnels, il en résulte des difficultés qui méritent d'être étudiées.

**2. SYSTÈME ÉTUDIÉ**

La figure.1 représente le système de coordonnées curviligne  $x, y$  et  $\theta$  dont le repère local associé est  $(M, \vec{t}, \vec{n}, \vec{e}_\theta)$ , où  $M$  est un point de la surface de l'ellipsoïde. Nous traitons le problème avec les hypothèses suivantes : les transferts qui effectuent en regime laminaires et permanents ; sont bidimensionnels aucune source de chaleur ne se dégage dans le système ; la réaction chimique provoquée lors du dépôt n'a pas d'influence sur le mécanisme de transfert ; la dissipation d'énergie par viscosité et les transferts par rayonnement sont négligeables ; les effets Dufour et Soret sont négligeables ; les propriétés physiques de l'air à l'infini sont constantes ; l'air est assimilé à un gaz parfait pour le calcul de son coefficient de dilatation.

Figure.1 Système étudié et du référentiel



**3 EQUATION DE TRANSFERT**

Dans ces conditions, les équations de transferts s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\rho U}{r} \frac{dr}{dx} &= 0 ; \rho C_p (U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) \\ \rho (U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx}) &= \rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial U}{\partial y}) + g \cos(\beta) \beta_t \infty (T - T_\infty) \\ \rho (U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{U W}{r} \frac{dr}{dx}) &= \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial W}{\partial y}) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Conditions aux limites : Pour } y = 0 : U = V = 0 ; W = r \omega ; T = T_p \\ \text{Pour } y \rightarrow \infty : U \rightarrow U_e ; W \rightarrow 0 ; T \rightarrow T_\infty \end{aligned} \right\} (2)$$

Nous avons adimensionné ces équations en utilisant les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} C_p^* = C_p / C_{p_\infty} ; r^* = r / L ; \lambda^* = \lambda / \lambda_\infty ; \mu^* = \mu / \mu_\infty ; U_e^* = U_e / U_\infty ; x^* = x / L \\ \rho^* = \rho / \rho_\infty ; Re_\omega = \omega (L)^2 / \nu_\infty ; B = (Re_\omega / Re_\infty)^2 ; T^* = (T - T_\infty) / (T_p - T_\infty) ; Pr = \nu_\infty / a_\infty \\ \Omega = Gr / (Re_\infty)^2 ; \Omega' = Gr / (Re_\omega)^2 ; Re_\infty = U_\infty L / \nu_\infty ; Gr = g_a \beta_t (L)^3 (T_p - T_\infty) / (\nu_\infty)^2 \end{aligned} \right\} (3)$$

Alors les équations de transfert adimensionnelles s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho^* U^*)}{\partial x^*} + L_0 \frac{\partial(\rho^* V^*)}{\partial y^*} + \frac{\rho^* U^*}{r^*} \frac{dr^*}{dx^*} &= 0 \\ \rho^* (U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + L_0 V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} - \frac{W^{*2}}{r^*} \frac{dr^*}{dx^*}) &= L_1 \rho^* U_e^* \frac{\partial U_e^*}{\partial x^*} + \\ &L_0 \frac{\partial}{\partial y^*} (\mu^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*}) + L_2 \cos(\beta) (T^* - T_\infty^*) \\ \rho^* (U^* \frac{\partial W^*}{\partial x^*} + L_0 V^* \frac{\partial W^*}{\partial y^*} + \frac{U^* W^*}{r^*} \frac{dr^*}{dx^*}) &= L_0 \frac{\partial}{\partial y^*} (\mu^* \frac{\partial W^*}{\partial y^*}) \\ \rho^* C_p^* (U^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + L_0 V^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}) &= L_3 \frac{\partial}{\partial y^*} (\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}) \end{aligned} \right\} (5)$$

Conditions aux limites : Pour  $y = 0 : U^* = V^* = 0 ; W^* = L_4 r^* ; T^* = 1$   
Pour  $y^* \rightarrow \infty : U^* = L_5 U_e^* ; W^* = T^* = 0$

$$\text{Avec } y^* = \frac{(n_1 Re_\infty^{\frac{1}{2}} + n_2 Gr^{\frac{1}{4}} + n_3 Re_\infty^{\frac{1}{2}}) y}{n_1 + n_2 + n_3} ; U^* = \frac{(\frac{n_1}{U_\infty} + n_2 Gr^{-\frac{1}{4}} \frac{L}{\infty} + \frac{n_3}{L\omega}) U}{n_1 + n_2 + n_3} ;$$

$$V^* = \frac{(\frac{n_1}{U_\infty} Re_\infty^{\frac{1}{2}} + n_2 Gr^{\frac{1}{4}} \frac{L}{\infty} + \frac{n_3}{L\omega} Re_\infty^{\frac{1}{2}}) V}{n_1 + n_2 + n_3} ; W^* = \frac{(\frac{n_1}{U_\infty} + n_2 Gr^{-\frac{1}{4}} \frac{L}{\infty} + \frac{n_3}{L\omega}) W}{n_1 + n_2 + n_3} ;$$

$$L_0 = \frac{(n_1 + n_2 Gr^{\frac{1}{4}} + n_3)}{n_1 + n_2 + n_3} ; L_1 = \frac{(n_1 + n_2 \Omega^{-1} + n_3 B^{-1})}{n_1 + n_2 + n_3} ; L_2 = \frac{(n_1 \Omega + n_2 + n_3 \Omega')}{n_1 + n_2 + n_3} ;$$

$$L_3 = \frac{(n_1 + n_2 Gr^{\frac{1}{4}} + n_3)}{Pr(n_1 + n_2 + n_3)} ; L_4 = \frac{(n_1 \sqrt{B} + n_2 \Omega'^{-\frac{1}{2}} + n_3)}{n_1 + n_2 + n_3} ; L_5 = \frac{(n_1 + n_2 \Omega^{-\frac{1}{2}} + n_3 B^{-\frac{1}{2}})}{n_1 + n_2 + n_3} ; (6)$$

La vitesse  $U_e$  à la frontière extérieure de la couche limite est calculée numériquement à l'aide de la méthode des singularités et les propriétés physiques de l'air dans la couche limite sont calculées à partir des formules empiriques suivantes [5] :

$$\left. \begin{aligned} \rho(T) &= 230.T^{-1} .\text{kg.m}^{-3} & ; & & Cp(T) &= 1050.\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \mu(T) &= 5,2.10^{-7}.T^{0,635}.\text{Pa.s} & ; & & \lambda(T) &= 2,66.10^{-4}.T^{0,805}.\text{J.s}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Où T est en Kelvins. Selon KNUDSEN et KATZ [5], ces relations s'appliquent correctement si  $Re_\infty < 3.10^5$ ,  $Pr > 0,6$  et les propriétés du fluide sont évaluées à  $0,58(T_p - T_\infty) + T_\infty$ . Pour le cas présent :  $Re_\infty = 8.10^3$  ;  $Pr = 0,71$ . A la température de référence  $T_r = 25^\circ\text{C}$  :

$$\rho(T_r) = 0,772 \text{ kg.m}^{-3} ; \mu(T_r) = 19,370.10^{-6} \text{ Pa.s} ; Cp(T_r) = 1050 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} ; \lambda(T_r) = 0,026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Les coefficients  $n_i$  peuvent prendre comme valeur 1 ou 0 ( $i = 1$  : convection axiale ;  $i = 2$  : convection naturelle ;  $i = 3$  : convection rotatoire)

#### 4. GRANDEURS LOCALES

Nombre de Nusselt 
$$\frac{h L}{\lambda_\infty} = Nu = -L \frac{\lambda}{\lambda_\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{1}{(T - T_\infty)} \quad (8)$$

Coefficients de frottement 
$$CF_x = \frac{2 \mu}{\rho(U_\infty)^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad CF_\theta = \frac{2 \mu}{\rho(U_\infty)^2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (9)$$

Ce qui donne après adimensionnalisation :

$$Nu = -L_6 \lambda^* \left( \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} \quad CF_x = L_7 \mu^* \left( \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} \quad CF_\theta = L_7 \mu^* \left( \frac{\partial W^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} \quad (10)$$

$$\text{Avec } L_6 = \frac{(n_1 Re_\infty^{\frac{1}{2}} + n_2 Gr^{\frac{1}{4}} + n_3 Re_\infty^{-\frac{1}{2}})}{n_1 + n_2 + n_3} ; \quad L_7 = 2 \frac{(n_1 Re_\infty^{-\frac{1}{2}} + \frac{n_2 Gr^{\frac{3}{4}}}{Re_\infty^2} + n_3 Re_\infty^{-\frac{1}{2}})}{n_1 + n_2 + n_3} \quad (11)$$

#### 5. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Nous adoptons pour la méthode aux différences finies pour discrétiser les équations adimensionnelles et la méthode de Keller dite « Block élimination » a été utilisée pour résoudre le système linéaire avec les conditions de calcul suivantes : le demi axe horizontal «  $a = 0,5\text{m}$  » des ellipsoïdes est pris comme longueur caractéristique. Le nombre de Prandtl est considéré à la température de référence  $T_r$ . Nous prenons comme « pas » de calcul  $\Delta y = 0,03$ .

##### 5.1 Convection axiale pure ( $n_1 = 1$ et $n_2 = n_3 = 0$ )

La figure.2 montre les variations de  $T^*$  en fonction de  $y^*$ . Nous constatons que la longueur de la couche limite thermique augmente et la masse de fluide devient plus chaude quand les propriétés physiques deviennent variables. Cela signifie que les échanges thermiques entre le corps et le fluide s'avèrent plus intensif. La figure.3 illustre les variations de  $U^*$ , en fonction de  $y^*$ . Nous remarquons que la vitesse à l'extérieur de la couche limite ne dépendant que de la forme de la paroi, reste la même dans les deux cas, et elle est atteinte plus vite quand les propriétés physiques

demeurent constantes. Cela signifie que la longueur de la couche limite hydrodynamique augmente quand les propriétés physiques deviennent variables.

Figure.3 : Variations de  $U^*$  en fonction de  $y^*$ .

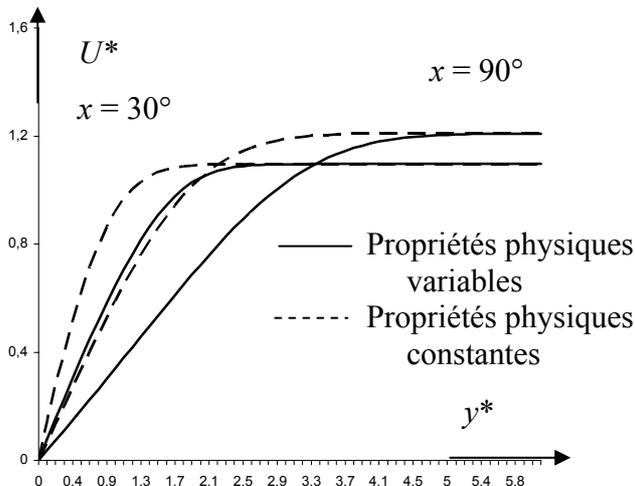
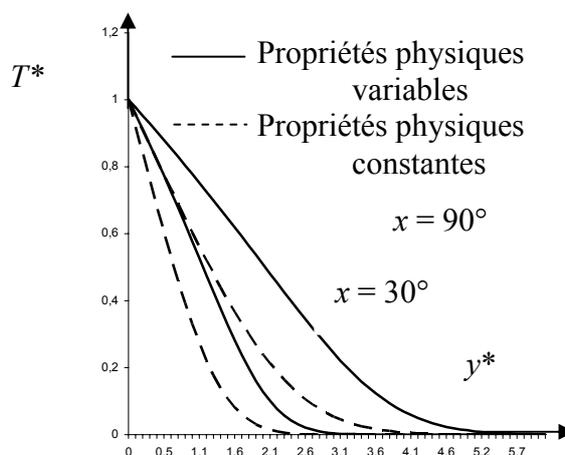


Figure.2 Variations de  $T^*$  en fonction de  $y^*$ .



### 5.2 Convection forcée axiale combinée à la convection rotatoire en absence de convection naturelle ( $n_1 = n_2 = 1$ et $n_3 = 0$ ).

La figure.4 représente la variation de la quantité  $NuRe_\omega^{-1/2}$  en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $B$ . Il en résulte que le transfert de chaleur diminue lorsque  $B$  augmente. En outre, l'influence de  $x$  réduit ce nombre, cela signifie que le transfert thermique diminue.

### 5.3 Influence de la configuration géométrique du corps dans le cas de la convection axiale pure ( $n_1 = 1$ et $n_2 = n_3 = 0$ )

Nous utilisons le paramètre adimensionnel  $R = a/b$  qui compare les longueurs de demi axes vertical et horizontal.

La figure.5 illustre les variations de  $CF_x$  en fonction de  $x$ . Nous remarquons que  $CF_x$  est une fonction croissante de  $x$  et passe par un maximum puis diminue rapidement. Le maximum de  $CF_x$  et sa diminution brutale au-delà annoncent un décollement de la couche limite. En outre, pour le cas d'une sphère ( $R = 1$ ), le maximum a lieu au voisinage de  $x = 58^\circ$ . Notons que [2] signale l'existence d'un frottement maximal autour de  $60^\circ$  pour le cas d'une sphère.

Figure.4 : Variations de  $NuRe_\omega^{-1/2}$  en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $B$  si  $\Omega = 0$ .

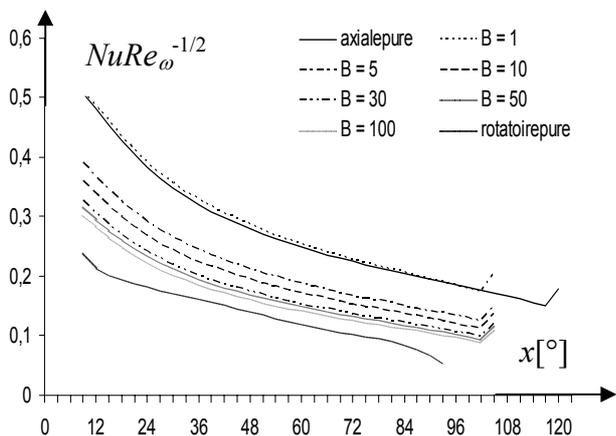
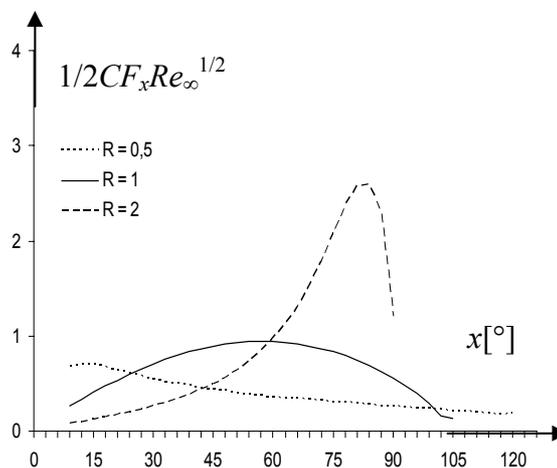


Figure.5 : Variations de  $1/2CF_xRe_\infty^{1/2}$  en fonction de  $x$



## DISCUSSION

Lorsque les propriétés physiques du fluide deviennent variables, les transferts et les longueurs des couches limites augmentent. Par ailleurs, si la température de la paroi atteint 400°C, il en résulte un écart relatif plus important. Donc, cette étude montre que l'insuffisance de l'hypothèse des propriétés physiques constantes est notoire lorsque la température est élevée. La brusque variation de ses grandeurs pariétales à partir d'une certaine valeur de  $x$ , signifie que le décollement de la couche limite commence. Les résultats obtenus montrent que la paroi d'un ellipsoïde aplati peut être rendue uniformément accessible, d'un point de vue des transferts thermiques et la prédominance de la convection naturelle est plus importante dans les domaines d'échange thermique. Cela signifie que l'influence de ceux-ci marque un grand rendement sur l'activité de la réaction en phase gazeuse.

## CONCLUSION

A l'issue de ce travail, nous disposons d'un programme de calculs informatique en Fortran. En respectant les hypothèses simplificatrices précédentes, les distributions des vitesses et des températures sont obtenues à partir de la résolution des équations de transfert. Elles permettent ensuite de déterminer les valeurs locales du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement. La considération de la variabilité des propriétés physiques de l'air, lorsque la température est élevée, est manifeste pour l'étude de ce phénomène.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Alicherif A, et al Rakotomalala M., et al Daïf A., et al Michel D. (1995), Contrôle hydrodynamique en convection mixte de l'épaisseur de dépôts en phase gazeuse de semi-conducteurs sur des corps à symétrie de révolution. In *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. Vol. 73, n° 6, pp 908-917.
- [2] George, L (1986). *Etude de la convection mixte tridimensionnelle autour d'une sphère en rotation dans un écoulement ascendant de fluide newtonien*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Perpignan, France.
- [3] Raminosa, Ch. R. R., et al Michel D. (1994). Convection mixte autour d'une sphère. Influence de la variabilité des propriétés physiques du fluide. In *Rev. Gén. Thermique* 389, 315-322
- [4] Rakotomalala. M., et al Michel D. (1994). Convection mixte autour de corps à symétrie de révolution. In *Rev. Gén. Therm. Fr.* n° 390-391.
- [5] Midoux, N. (1985), *Mécanique et Rhéologie des fluides en génie Chimique*, II-rue Lavosier-F75384 Paris cedex 08, Technique et Documentation (Lavosier).
- [6] Marchouk, G. (1980), *Méthode de calcul numérique*, Edition Mir, Moscou.
- [7] Figueiredo J. R., et al Fernandes B. L., et al Silverio R. J. R. (2006). Nonequilibrium modeling of an ammonia-water rectifying column via fundamental thermodynamic and transport relations, In *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol 23, No 04, pp 539-553.