

CONVECTION NATURELLE INSTATIONNAIRE EN MILIEU POREUX SATURE ANISOTROPE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE À PAROI EPAISSE

Hosni Souheil Harzallah, Abdelaziz Zegnani, Khalifa Slimi, Abdallah Mhimid (*)
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, 5000 Monastir, TUNISIA
Abdmhimid@yahoo.fr
TEL: 00 216 73 501 587, FAX: 00 216 73 501 597

RESUME

Dans se présent travail on a étudié numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle instationnaire dans un milieu poreux saturé anisotrope thermiquement et hydrauliquement compris entre deux parois verticales épaisses de même épaisseur chauffées différentiellement, les parois horizontales sont imperméables et adiabatiques.

Les équations de conservation à l'échelle macroscopique sont résolues par la MVF. Le code de calcul mis au point est validé avec succès avec des résultats antérieurs.

Les résultats numériques obtenus nous ont permis de déterminer l'évolution spatio-temporelle des différentes variables d'états (température et vitesse).

Dans cette étude on se contente d'étudier la sensibilité des transferts en fonction du rapport d'anisotropie thermique.

NOMENCLATURE

A Rapport de forme de la cavité,
H Hauteur de la cavité, m,
L Largeur de la cavité, m
D Epaisseur de paroi adimensionnelle,
g Accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
 c_p Capacité calorifique à pression constante, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
K Perméabilité du milieu poreux, m^2
 R_{cx} Rapport d'anisotropie thermique suivant x,
 R_{cz} Rapport d'anisotropie thermique suivant z,
 R_{px} Rapport d'anisotropie hydraulique suivant x,
 R_{pz} Rapport d'anisotropie hydraulique suivant z,
 R_w Rapport de conductivité thermique paroi-milieu poreux,
t Temps, (s)
P Pression, $kg.m^{-1}.s^{-2}$
 P_0 Pression ambiante, $kg.m^{-1}.s^{-2}$
T Température, K

ΔT Différence de température, $T_h - T_c$
u, w Composantes de vitesse respectivement suivant x et z, $m.s^{-1}$
U, W Composantes adimensionnée de vitesse respectivement suivant x et z,
x, z Coordonnées de l'espace, m
X, Z Coordonnées de l'espace Adimensionnelles,

Lettres Greques

α Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
 λ Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
 ρ Masse volumique du fluide, $kg.m^{-3}$
 μ Viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
 ν Viscosité cinématique du fluide, m^2
 σ_p Rapport de chaleur massiques milieu poreux-fluide,
 σ_w Rapport de chaleur massiques paroi-milieu poreux,

β	Coefficient de dilatation thermique du fluide, K^{-1}	h	Chaude
θ	Température adimensionnel,	p	Poreux
τ	Temps adimensionnel,	ref	Référence
ε	Porosité du milieu,	s	Solide
Π	Pression adimensionnel,	w	Paroi
Indices		Nombres adimensionnels	
c	Froide	Ra	Nombre de Rayleigh modifié,
eff	Effective	Nu	Nombre de Nusselt local,
f	Fluide	\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen,

1. INTRODUCTION

L'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle en milieu poreux intéressent un large champ d'applications dans plusieurs domaines. Plusieurs travaux ont été réalisés sur la convection naturelle dans les milieux poreux saturés isotropes.

Les milieux poreux sont généralement anisotropes. L'anisotropie hydraulique et/ou thermique attire l'attention de plusieurs auteurs ([1– 3]).

Les travaux introduisant l'effet de l'anisotropie en présence d'un milieu poreux couplée à l'effet de parois ont reçu peu d'attention. La convection naturelle dans une cavité poreuse à parois minces a été étudiée par Chang and Lin [4]. Les auteurs ont trouvé que l'effet de la conduction dans la paroi fait baisser notamment le transfert de chaleur de la paroi chaude vers la paroi froide de la cavité poreuse. L'effet de la conduction dans la paroi sur la convection naturelle dans une enceinte remplie par un milieu poreux non-Darcien a été étudié par Chang and Lin [5]. La convection naturelle stationnaire couplée aux effets de parois dans une cavité poreuse verticale limitée d'un seul côté par une paroi épaisse et comprise entre deux parois épaisses a été étudiée par Saeid [6,7]. L'auteur a montré que plus la paroi est épaisse plus le nombre de Nusselt décroît, et que la circulation du fluide saturant le milieu poreux devient plus importante dans le cas des parois minces. Amara et al. [8] ont étudiée numériquement l'effet de la conduction dans la paroi sur l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur dans un cylindre ouvert à ses deux extrémités remplie par un milieu poreux. Le cylindre étant soumis à sa surface latérale à un flux de chaleur sinusoïdale.

A notre connaissance, la convection naturelle instationnaire dans une cavité différentiellement chauffée dont les parois horizontales sont imperméables et adiabatiques et remplie d'un milieu poreux anisotrope tenant compte de la conduction dans les parois n'a pas été étudié ce qui a motivé cette étude.

La résolution numérique des équations de conservation étant réalisée par la MVF (Patankar, [9]). Les résultats numériques obtenus ont permis de déterminer l'évolution spatio-temporelle des différentes variables d'états et d'étudier la sensibilité des transferts aux rapports d'anisotropie thermiques et hydrauliques.

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

2.1. Définition du problème

La configuration géométrique utilisée est une cavité rectangulaire de hauteur H et de largeur L . Les parois verticales sont différentiellement chauffées à des températures T_c et T_f (Figure 1), alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Nous supposons que les transferts sont bidimensionnels, que la matrice solide est indéformable et en équilibre thermique local avec le fluide saturant, que les travaux de compression sont négligeables, que la loi de Darcy est valable et que le fluide saturant est newtonien et incompressible satisfaisant aux approximations de

Boussinesq. Le modèle mathématique tient compte de l'anisotropie thermique et hydraulique du milieu poreux.

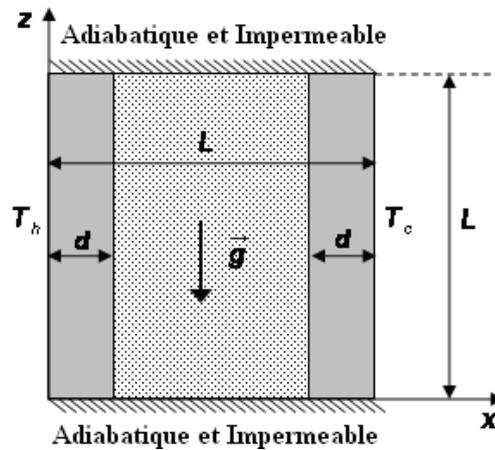


Figure 1. Modèle physique et système de coordonnées

2.2. Equations macroscopiques

La mise sous forme adimensionnelle est basée sur le choix des variables adimensionnelles suivantes :

$$(X, Z) = \frac{(x, w)}{L_{\text{ref}}} ; D = \frac{d}{L_{\text{ref}}} ; \tau = \frac{t}{t_{\text{ref}}} ; (U, W) = \frac{(u, w)}{V_{\text{ref}}} ; \theta = \frac{T - T_c}{\Delta T_{\text{ref}}} ; \theta_w = \frac{T_w - T_c}{\Delta T_{\text{ref}}} ; \Pi = \frac{P - P_0}{P_{\text{ref}}}$$

Les grandeurs de références sont définies ainsi:

$$L_{\text{ref}} = L ; t_{\text{ref}} = \frac{L}{V_{\text{ref}}} ; P_{\text{ref}} = \frac{\alpha \mu_f}{K} ; V_{\text{ref}} = \frac{\alpha}{L} ; \Delta T_{\text{ref}} = T_h - T_c$$

Où K étant la perméabilité du milieu supposé isotrope.

Les équations adimensionnelles de conservation s'écrivent comme suit :

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$U = -R_{px} \frac{\partial \Pi}{\partial X} \quad (2a)$$

$$W = -R_{pz} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} + Ra\theta \right) \quad (2b)$$

Avec $R_{px} = \frac{K_x}{K}$ et $R_{pz} = \frac{K_z}{K}$ sont respectivement les rapports d'anisotropie hydraulique suivant la direction x et z ; Ra est le nombre de Rayleigh modifié, $Ra = \frac{Kg\beta L\Delta T}{\alpha \nu_f}$.

On note la perméabilité hydraulique effective est représenté par un tensor d'ordre 2.

En combinant les équations (1), (2a) et (2b), on obtient l'équation de Poisson pour la pression:

$$R_{px} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} + R_{pz} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2} - R_{pz} Ra \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad (3)$$

Equation de conservation de l'énergie du milieu poreux

$$\sigma_p \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = R_{cx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + R_{cz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (4)$$

Avec $\sigma_p = \frac{(\rho c_p)_{\text{eff}}}{(\rho c_p)_f}$ le rapport des chaleurs massiques milieu poreux-fluide ; $R_{cx} = \frac{\lambda_x}{\lambda}$ et $R_{cz} = \frac{\lambda_z}{\lambda}$ sont respectivement, les rapports d'anisotropie thermique suivant la direction x et z.

On note la conductivité thermique effective est représenté par un tensor d'ordre 2.

Equation de conservation de l'énergie de la paroi

$$\sigma_w \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = R_w \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + R_w \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} \quad (5)$$

Avec $\sigma_w = \frac{(\rho c_p)_w}{(\rho c_p)_f}$ désigne le rapport des chaleurs massiques paroi-milieu poreux ; $R_w = \frac{\lambda_w}{\lambda}$ est le rapport de conductivité thermique paroi-milieu poreux.

2.3. Conditions initiales et aux limites

Initialement, le milieu poreux est en équilibre hydrostatique et maintenu à la température froide T_c . Ceci se traduit pour les conditions initiales suivantes:

$$t=0: P = \theta = \theta_w = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } 0 \leq Z \leq A \quad (6)$$

Les parois verticales de l'enceinte sont imperméables et maintenues à des températures constantes chaude et froide :

$$t>0: \left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right)_{X=D,Z} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right)_{X=1-D,Z} = 0 \quad ; \quad \theta_w(0, Z, \tau) = 1 ; \theta_w(1, Z, \tau) = 0 \quad (7)$$

Les parois horizontales de l'enceinte situées en ($Z=0, A$) sont imperméables et adiabatiques. Ceci se traduit par:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{Z=0,A} = Ra\theta(X, Z=0, A, \tau) \quad (8a) \quad ; \quad \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \right)_{X,Z=0,A} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq D \text{ et } 1-D \leq X \leq 1 \quad (8b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_{X,Z=0,A} = 0 \quad \text{pour } D \leq X \leq 1-D \quad (8c)$$

La continuité du champ thermique aux interfaces situées en $X=D$ et $X=1-D$ s'exprime comme suit :

$$\theta_w(D, Z, \tau) = \theta(D, Z, \tau) ; \theta(1-D, Z, \tau) = \theta_w(1-D, Z, \tau) \quad (9)$$

La continuité du flux de chaleur conductif à travers les deux interfaces peut s'écrire:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=D,1-D,Z} = R_w \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right)_{X=D,1-D,Z} \quad (10)$$

Les nombres de Nusselt local et moyen à travers l'interface milieu poreux-paroi, pour $X=D$ et $X=1-D$ sont définies comme suit: (Nawaf, [7])

$$Nu = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=D,1-D,Z} \quad ; \quad \overline{Nu} = - \frac{1}{A} \int_0^A \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=D,1-D,Z} \quad (11)$$

\overline{Nu}_p Représente le transfert de chaleur à travers le milieu poreux.

3. METHODE NUMERIQUE

Le système d'équations obtenues est résolu numériquement par la méthode des volumes finis classiques (Patankar, [9]). Le maillage utilisé est uniforme. Pour la discrétisation temporelle, nous avons adopté un schéma implicite et pour le traitement du terme de convection, on a utilisé un schéma *Upwind*. La résolution du système d'équations discrétisées peut être faite à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss basée sur l'algorithme *TDMA* (*Tri Diagonal Matrix Algorithm*).

4. RESULTATS ET DISCUSSION

Les simulations numériques ont été effectuées dans le cas d'une cavité de rapport de forme $A = 1$, remplie d'un milieu poreux de porosité $\varepsilon = 0.75$, de rapport de chaleur massiques milieu poreux-fluide $\sigma_p = 19.69$, de rapport de chaleur massiques paroi-milieu poreux $\sigma_w = 1135.07$ et d'un nombre de Rayleigh modifié $Ra = 10^3$. Les parois de la cavité sont de même épaisseur adimensionnelle $D = 0.2$ et maintenues à une différence de température $\Delta T = 23.46$ °C.

Effet de l'anisotropie thermique R_{cx}

Les figures (2 a-b) montrent l'évolution des profils de température aux interfaces ($X=D$) et ($X=1-D$) respectivement, pour différents valeurs de R_{cx} .

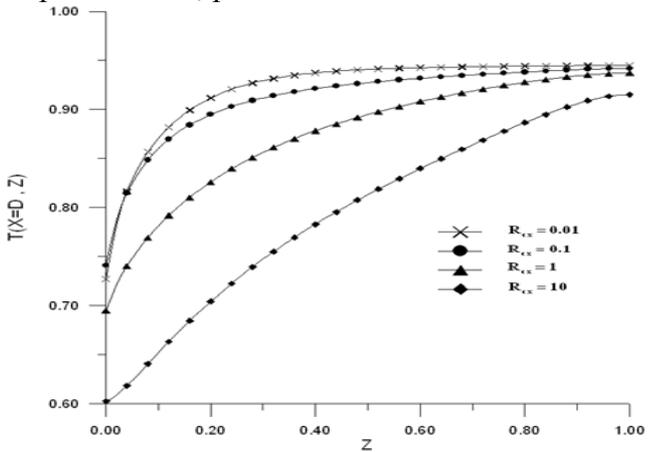


Fig. 2a. Profils de température à l'interface $X=D$ en fonction de Z à différentes valeurs de R_{cx} .

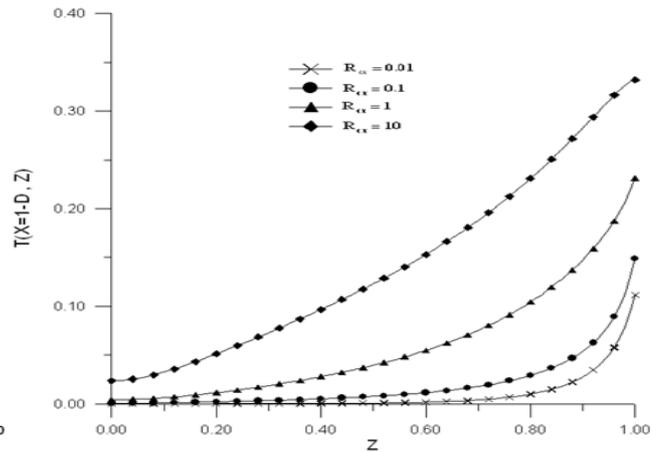


Fig. 2b. Profils de température à l'interface $X=1-D$ en fonction de Z à différentes valeurs de R_{cx} .

Il est bien admis que la convection naturelle à l'intérieur de la cavité poreuse est déclenchée par la différence de température des interfaces froides et chaudes des parois. En observant ses profils (Fig.2a), on remarque que cette différence de température diminue lorsque R_{cx} augmente à l'interface ($X=D$) et par conséquent une diminution du nombre de Nusselt moyen Nu_p comme il est indiqué au tableau 1. Inversement, à l'interface froide ($X=1-D$) ; cette différence de température augmente avec R_{cx} (Fig.2b) et le nombre de Nusselt moyen Nu_p augmente (tableau 1).

Tableau 1. Variation du nombre de Nusselt moyen avec R_{cx} .

$R_{cx} = \lambda_x / \lambda$	$\overline{Nu}_p (X = D)$	$\overline{Nu}_p (X = 1 - D)$
0.01	44.90	$7.59 \cdot 10^{-2}$
0.1	27.19	0.14
1	10.10	0.38
10	2.42	0.83

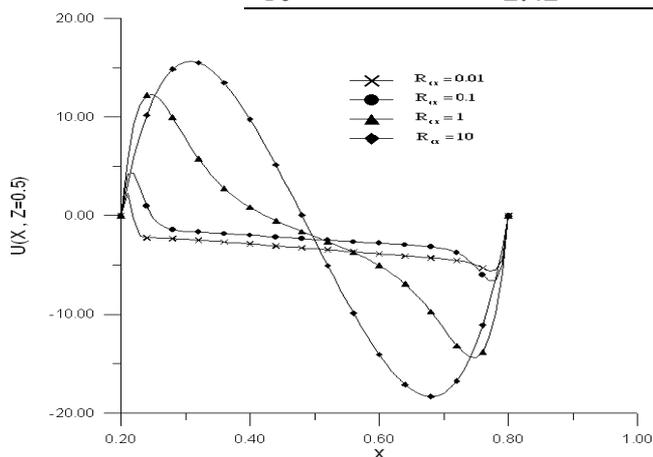


Fig. 3. Effet de R_{cx} sur la vitesse transversale U à mi-hauteur de la cavité en fonction de X .

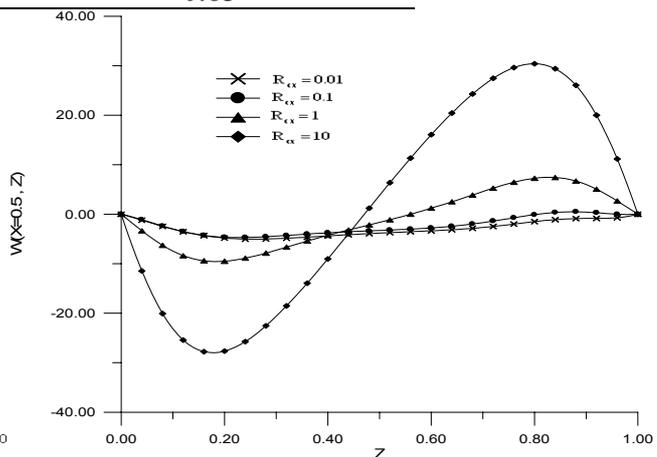


Fig. 4. Effet de R_{cx} sur la vitesse axiale W à mi-largeur de la cavité en fonction de Z .

L'examen de ces deux figures montre que la valeur absolue de la vitesse croît avec l'augmentation de R_{cx} . L'existence des valeurs négatives de U et W indiquent la présence d'une recirculation importante du fluide dans la zone centrale. Il ressort aussi de ces figures que plus la valeur de R_{cx} est

élevée plus la valeur absolue de la vitesse est faible près de l'interface chaude. Cette situation s'inverse près de l'interface froide.

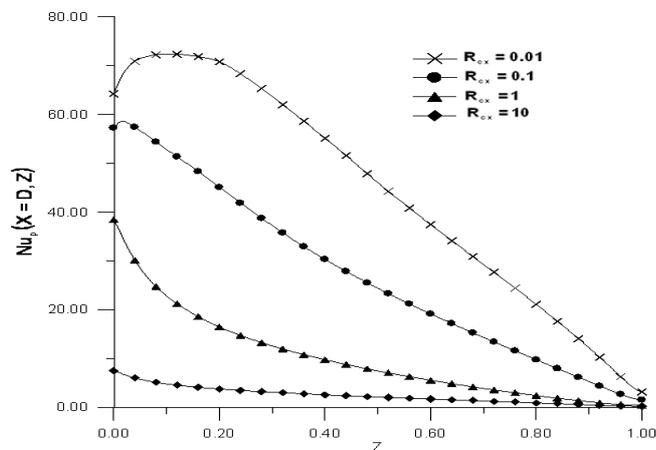


Fig.5. Effet de R_{cx} sur le nombre de Nusselt local Nu_p en $X=D$

La figure 5 montre la variation du nombre de Nusselt local le long de l'interface chaude ($X=D$).

Il ressort de cette figure que près de l'interface chaude, plus la valeur de R_{cx} est élevée, plus le nombre de Nusselt local est faible. Ceci est dû au fait que le mode conductif est important, et que le transfert de la chaleur à l'interface chaude est beaucoup plus important que lorsque la valeur de R_{cx} est élevée.

5. CONCLUSION

Le présent travail est une contribution à l'étude des problèmes d'écoulement et du transfert de chaleur par convection naturelle instationnaire en milieux poreux saturés anisotropes enfermés dans une cavité dont les deux parois verticales sont épaisses et différentiellement chauffées (cas d'un mur isolant) ; les deux autres sont supposées imperméables et adiabatiques. Nous avons mis au point un modèle et un logiciel régissant ce type de problème. Les résultats numériques obtenus nous ont permis de déterminer l'évolution spatio-temporelle des différentes variables d'états. Nous nous sommes limités à l'étude de la sensibilité des transferts au rapport d'anisotropie thermique suivant la direction x , R_{cx} .

Les principaux résultats indiquent que pour des rapports d'anisotropie thermique R_{cx} , plus R_{cx} est élevée plus la conduction l'emporte sur la convection. On peut conclure aussi que plus le rapport d'anisotropie thermique R_{cx} augmente plus le nombre de Nusselt moyen diminue le long de l'interface chaude et plus il augmente au niveau de l'interface froide.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Degan G., Vasseur P. And Bilgen E. Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 38, 1975-1987, 1995.
2. Slimi K., Mhimid A., Ben Salah M., Ben Nasrallah S., Mohamad A.A., Storesletten L., Anisotropy effects on heat and fluid flow by unsteady natural convection and radiation in saturated porous media, *Numer. Heat Transf.* 48 (2005) 763-790.
3. Nield D.A. The effect of anisotropy on the onset of convection in a porous medium. *Advances in Water Resources*, 2006.
4. Chang W.J., Lin H.C., Natural convection in a finite wall rectangular cavity filled with an anisotropic porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 37 (1994) 303-312.
5. Chang W.J., Lin H.C., Wall heat conduction effect on natural convection in an enclosure filled with a non-Darcian porous medium, *Numer. Heat Transf.* 25 (1994) 671-684.
6. Nawaf H. Conjugate natural convection in a porous enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls, *International Journal of Thermal Sciences.* 46, 531- 539, 2007.
7. Nawaf H. Conjugate natural convection in a vertical porous layer sandwiched by finite thickness walls, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 34, 210-216, 2007.
8. Amara T., Slimi K., Ben Nasrallah S., Free convection in a vertical cylindrical enclosure heated periodically with a heat flux density—Effect of wall heat conduction, *Int.J.Therm.Sci.*39 (2000) 1-19.
9. Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.