Convection de Rayleigh Bénard dans l'He^3 au voisinage du point critique

O. Daube[1], M. Bouafia[1*], P. Carlès[2]

[1]LMEE, Université d'Evry Val d'Essonne, 40 rue du Pelvoux, CE1455, 91020 Evry cedex,
daube@iup.univ-evry.fr , bouafia@iup.univ-evry.fr
[2] FAST, Université Paris XI, Campus d'Orsay, 91405 Orsay Cedex,
pierre.carles@upmc.fr

RESUME

On étudie par simulation numérique directe l'écoulement bidimensionnel de convection naturelle de type Rayleigh Bénard dans l'He^3 au voisinage de son point critique. Les équations de transport sont basées sur une approximation de « type anélastique » associées à une équation d'état prise sous forme paramétrique et non analytique. Les équations sont résolues numériquement par une méthode de différences finies couplée à une méthode de projection. Les résultats numériques donnant l'évolution temporelle de la différence entre la température de la paroi inférieure et celle de la paroi supérieure concordent mieux avec les données expérimentales lorsque une loi d'état paramétrique réelle est utilisée.

1. INTRODUCTION

Les propriétés de transport de fluides purs présentent des variations importantes au voisinage du point critique liquide-gaz. La diffusivité thermique tend vers zéro alors que la compressibilité isotherme, le coefficient de dilatation thermique, la capacité calorifique à pression constante divergent. Ces comportements sont à l'origine d'un mécanisme spécifique de transfert de chaleur appelé effet piston (EP) qui induit une homogénéisation rapide de la température par des effets thermo-acoustiques [1,2].

L'intérêt croissant porté ces dernières années sur la stabilité hydrodynamique des fluides supercritiques se traduit par un nombre important de travaux expérimentaux [3,4], théoriques [5,6] et numériques [7-10]. L'une des configurations qui s'est vite imposée comme modèle d'étude est celle de Rayleigh-Bénard du fait de l'interaction entre deux critères de stabilité : le critère de Rayleigh valable en Boussinesq et le critère de Schwarzchild valable pour les écoulements atmosphériques à grandes échelles. Dans un fluide supercritique, le critère de Schwarzchild devient pertinent sur des petites échelles de longueur y compris dans des cellules de très faibles dimensions du fait de la divergence de la compressibilité [3] [6]. Un nombre de Rayleigh modifié a été proposé par [5] incluant la différence entre le gradient réel et le gradient adiabatique de température.

Dans ce travail nous présentons les résultats obtenus par simulation numérique directe 2D de la convection de Rayleigh-Bénard dans l'He^3 supercritique et dans les conditions expérimentales de Furukawa *et al* [4]. Les équations gouvernant le problème sont les équations instationnaires de Navier-Stokes compressibles complétées par une loi d'état. Afin de filtrer les ondes acoustiques et de tenir compte de la stratification initiale, une approximation de type anélastique est utilisée. Un second point important de notre travail réside dans l'utilisation d'une loi d'état paramétrique reproduisant beaucoup plus fidèlement les propriétés du fluide au voisinage du point critique que ne le font les lois analytiques de type Van der Waals ou Redlich Kwong.

2. CONFIGURATION

Suivant les études expérimentales de [3,4], nous nous intéressons au problème du démarrage de la convection de Rayleigh-Bénard dans l'helium^3 supercritique pour des nombres de Rayleigh modifiés au dessus du seuil d'instabilité. Une couche d'He^3 d'épaisseur H (1,06mm) est confinée entre deux plaques de cuivre (voir figure 1). Elle est initialement au repos et aux conditions suivantes proches de celles du point critique caractérisées par (ρ_c, p_c, T_c) = (41.45kg/m^3, 1.15 10^{5}Pa, 3.31K).

- Il règne dans la cavité une température T_i homogène légèrement supérieure à la température critique Tc. La distance à Tc est caractérisée par $\varepsilon=(T_i-T_c)/T_c$
- Il existe une stratification initiale en ρ avec la masse volumique moyenne égale à la masse volumique critique ρ_c.

La paroi inférieure est chauffée à flux constant ϕ tandis que la paroi supérieure est maintenue à la température initiale T_i On considère des valeurs du chauffage ϕ telles que $(T- T_i)/(T_i-T_c)$ reste toujours << 1 dans la cavité, ce qui permet de supposer que la viscosité dynamique μ, la conductivité thermique k, la chaleur spécifique à pression constante c_p, le coefficient de dilatation thermique β restent constants dans l'intervalle de température considéré et égaux à leur valeur pour $T=Ti$.

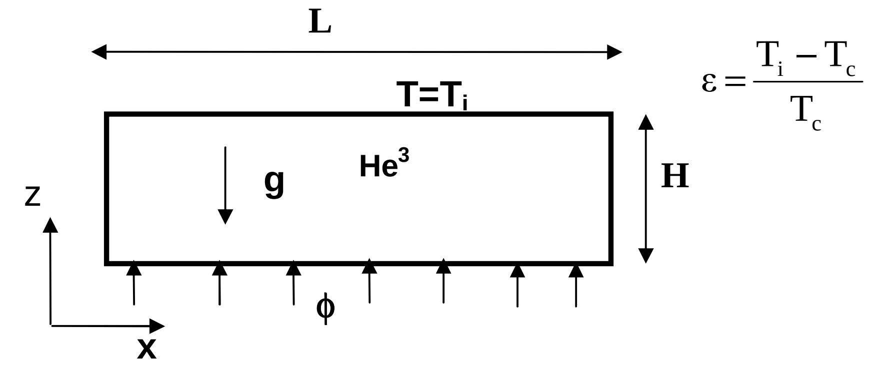

Figure 1 : He^3 supercritique en configuration de Rayleigh -Bénard

3. EQUATIONS GENERALES

Pour les valeurs de ε considérées, les hypothèses de milieu continu s'appliquent et l'écoulement est régi par les équations de Navier Stokes compressibles qui sont adimensionnées par les grandeurs de référence suivantes, l'indice $_c$ indiquant que la grandeur est prise aux conditions du point critique:

- *Longueur* $L_0 = H$ épaisseur de la couche fluide ; *Temps*: $t_0 = t_{ep}$ temps caractéristique de l'effet piston ; *Vitesse*: $V_0 = L_0/t_0$
- *Pression*: $P_0 = p_c$; *Densité*: $\rho_0 = \rho_c$; *Température*: $T_0 = T_c$

Les équations s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \qquad \text{Equation de continuité}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -Eu \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} - \frac{1}{F} \rho \vec{z} \qquad \text{Equation de la quantité de mouvement}$$

$$\rho \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T + G_h \beta T_i \frac{Dp}{Dt} \qquad \text{Equation de l'énergie}$$

$$p = f(\rho, T) \qquad \text{Equation d'état}$$

Les paramètres adimensionnels apparaissant dans ces équations sont :

$Re = \dfrac{\rho_c V_0 L_0}{\mu}$ nombre de Reynolds; $Eu = \dfrac{p_c}{\rho_c V_0^2}$ nombre d'Euler; $G_h = \dfrac{p_c}{\rho_c c_p T_c} = Eu\,Ek$

$Pe = \dfrac{\rho_c c_p V_0 L_0}{k}$ nombre de Péclet; $F = \dfrac{V_0^2}{g L_0}$ nombre de Froude;

4. MODELISATION

Afin d'éviter des critères de stabilité très restrictifs dus à la très grande disparité entre la vitesse convective et la vitesse du son, on filtre les ondes acoustiques en effectuant un développement en perturbation régulière de toute grandeur *f* par rapport au petit paramètre $\eta=1/Eu$:

$$f = f^{(0)} + \eta f^{(1)} + \ldots$$

Dans ces conditions, le problème d'ordre $^{(0)}$ s'écrit :

$$\nabla p^{(0)} + \frac{1}{EuF}\rho^{(0)} = 0 \text{ avec } \frac{1}{EuF} = \frac{\rho_c g L_0}{p_c}$$

La quantité $1/EuF$, petite mais fixe car indépendante de la distance au point critique et du flux ϕ, caractérise la stratification initiale. En suivant les hypothèses classiques des approximations de type **anélastique**, on obtient pour le problème d'ordre $^{(0)}$ la relation suivante :

$$p^{(0)} = \overline{P}(t) + p_s(z) \text{ où } p_s \text{ satisfait} : \frac{dp_s}{dz} + \frac{1}{EuF}\rho^{(0)}(z) = 0$$

On notera $\rho_s(z) = \rho^{(0)}(z)$ la stratification initiale en densité. Le modèle utilisé s'écrit alors :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_s\vec{V}) = 0 \qquad \text{Equation de continuité}$$

$$\rho_s\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla\pi + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{V} + \frac{\rho_s-\rho}{F}\vec{z} \qquad \text{Equation de la quantité de mouvement}$$

$$\rho_s\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pe}\nabla^2 T + G_h\beta T_i\left(\frac{d\overline{P}}{dt} + \vec{V}\cdot\nabla p_s\right) \qquad \text{Equation de l'énergie}$$

$$\overline{P}(t) + p_s(z) = f(\rho, T) \qquad \text{Equation d'état}$$

Où π est une fonction jouant le même rôle que la pression en incompressible. Notons que bien qu'il soit obtenu de façon un peu différente, ce modèle est similaire à celui proposé par Accary *et al*.

5. METHODOLOGIE NUMERIQUE

Les équations sont discrétisées spatialement par différences finies mimétiques (voir [11]) centrées d'ordre 2 sur un maillage décalé de type MAC, uniforme dans la direction *x* et variable en *z*. Les dérivées temporelles sont discrétisées par un schéma Euler retardé d'ordre 2. Les termes linéaires sont traités de façon implicite tandis que les termes non linéaires sont traités explicitement par une extrapolation de type Adams - Bashforth. Le couplage vitesse - π est traité par une méthode dérivée des méthodes de projection en incompressible.

A l'intérieur d'un pas de temps $n\Delta t \rightarrow (n+1)\Delta t$, les équations sont résolues de façon découplée :

1) Equation de l'énergie : $T^{(n)} \rightarrow T^{(n+1)}$

2) Equation d'état : $\rho^{(n)} \rightarrow \rho^{(n+1)}$ et $\overline{P}^{(n+1)}$ puis calcul de $(\partial\rho/\partial t)^{(n+1)}$
3) Equation de la quantité de mouvement :
   a) Etape de prédiction : $V^{(n)} \rightarrow V^{*}$
   b) Etape de « projection » : $\rho_s V^{(n+1)} = \rho_s V^{*} + \nabla\varphi$, φ étant calculé de façon à satisfaire : $\nabla\cdot(\rho_s V^{(n+1)}) = -(\partial\rho/\partial t)^{(n+1)}$

6. EQUATION D'ETAT

On utilise une équation d'état paramétrique comportant une partie régulière universelle et une partie singulière dépendant du fluide, dont les coefficients ont été calculés de façon à correspondre aux résultats expérimentaux. L'avantage essentiel de cette loi est que, contrairement aux lois analytiques de type Van der Waals, elle contient les exposants critiques corrects. D'un point de vue numérique, les valeurs $\rho^{(n+1)}$, $\overline{P}^{(n+1)}$ de la seconde étape du paragraphe précédent sont obtenues en résolvant par une méthode de Newton – Raphston le système d'équations non linéaires constitué de la loi d'état écrite en chacun des points du maillage et en imposant la conservation de la masse totale.

7. RESULTATS

Dans une première étape, le code a été validé en retrouvant dans le cas d'un chauffage à température constante le critère de Rayleigh-Schwarzchild pour le démarrage de la convection. Pour cela, on a procédé de manière similaire à Accary *et al* [9] en traçant un diagramme temporel h-δT, *h* étant l'épaisseur de la couche chaude et δT l'écart de température au travers de la couche. On sait que le seuil d'apparition de l'instabilité dans un fluide supercritique chauffé par le bas est donné par le nombre de Rayleigh modifié [5]:

$$Ra_{\mathrm{mod}} = \frac{\rho_c^2 c_p g \beta\, h^4}{\lambda \mu}\left(\frac{\partial T}{h} - g\frac{T_i \beta}{c_p}\right) \geq Ra_c$$

Le terme $gT_i\beta/c_p$ est le gradient adiabatique de température qui joue un rôle stabilisant dans le démarrage de la convection. Le nombre de Rayleigh critique dépend des conditions aux limites est vaut ici 1708. On a considéré une cavité d'épaisseur H=2.5 mm de rapport de forme A=2. Sa température initiale est caractérisée par la distance au point critique $\varepsilon = 0.02$. La paroi inférieure est maintenue à une température constante $T_h=T_i+\Delta T$ alors que la paroi supérieure demeure à la température initiale. Les parois latérales sont supposées adiabatiques. La figure 2 montre les évolutions de δT en fonction de h jusqu'aux instants d'effondrement de la couche limite chaude pour différents cas de chauffage. La zone d'instabilité est délimitée par la courbe de stabilité déduite du critère de Rayleigh-Schwarzchild. Dans le cas où le chauffage n'est pas suffisamment intense pour déclencher la convection, aucune instabilité n'est alors observée dans la couche limite (exemple la courbe pour δT= 6μK).

Dans une seconde étape et toujours pour $\varepsilon = 0.02$, on s'est intéressé au cas d'un chauffage à flux constant $\phi = 1.69\ 10^{-7}$ W/cm^2 dans une cavité de hauteur H=1.05 mm et de rapport de forme A=L/H=2. On donne sur la figure 4 les évolutions temporelles de l'écart δT(t) entre la température de la plaque inférieure et celle de la plaque supérieure obtenues en utilisant différentes lois d'état. On peut remarquer que les lois analytiques (Van der Waals ou Redlich Kwong) donnent les mêmes résultats. Ces profils montrent tous un comportement similaire : une évolution quasi-linéaire correspondant à la phase de diffusion jusqu'à l'instant où la convection démarre (premier pic depuis le début du chauffage) suivie d'oscillations qui s'amortissent au cours du temps jusqu'à l'établissement d'un état stationnaire. Ces oscillations ont également été observées expérimentalement et sont attribuées dans [10] à la compétition entre diffusion et effet piston. Notons que la courbe relative à la loi paramétrique présente un meilleur accord avec les résultats expérimentaux de [4] (figure 3) notamment en ce qui concerne l'instant où le régime convectif commence, les instants des différents extrema, la période des pseudo oscillations et la température finale. En revanche le retour « par en dessous » vers l'état asymptotique observé expérimentalement (voir figure 3) ne se retrouve pas dans les calculs, comme dans toutes les simulations numériques publiées.

Dans une troisième étape, on a considéré le cas $\varepsilon = 0.005$ pour trois valeurs de chauffage, $\phi = 1.\ 10^{-7}$ W/cm^2 , $\phi = 5.\ 10^{-8}$ W/cm^2 et $\phi = 1.\ 10^{-8}$ W/cm^2. La figure 5 montre les évolutions temporelles de $\delta T(t)$ pour ces trois valeurs de ϕ. Dans le cas $\phi = 1.\ 10^{-8}$ W/cm^2 on note l'absence de la phase oscillatoire amortie avant l'installation d'un régime asymptotique stationnaire. Si on augmente le chauffage, l'écoulement subit une seconde bifurcation vers un écoulement périodique puis quasi périodique.

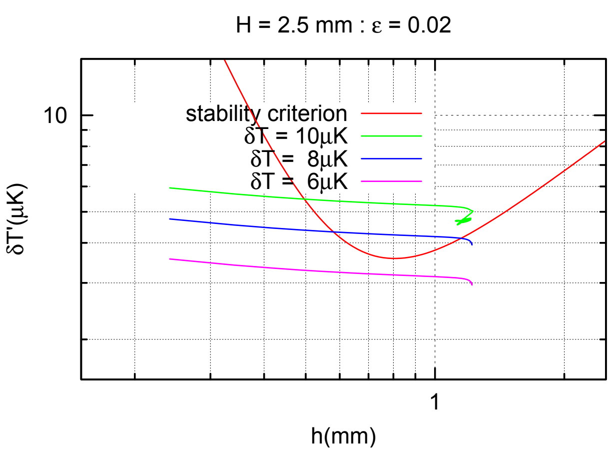

Figure 2: écart de température δT dans l'épaisseur *h* de la couche chaude

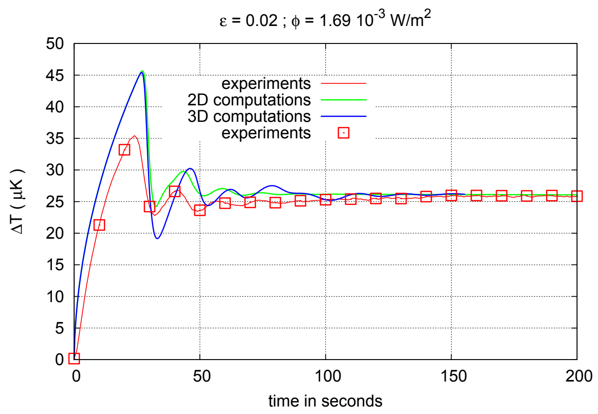

Figure 3: δT mesuré (d'après [4]) et calculé pour $\varepsilon = 0.02$ et $\phi = 1.69\ 10^{-3}$W/m^2

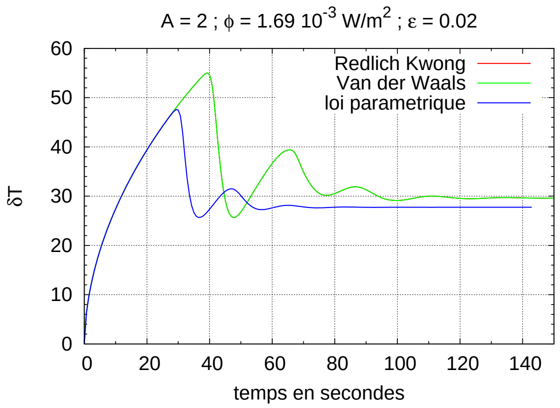

Figure 4: écart de température entre la paroi chauffée à flux constant et la paroi supérieure maintenue à température froide constante

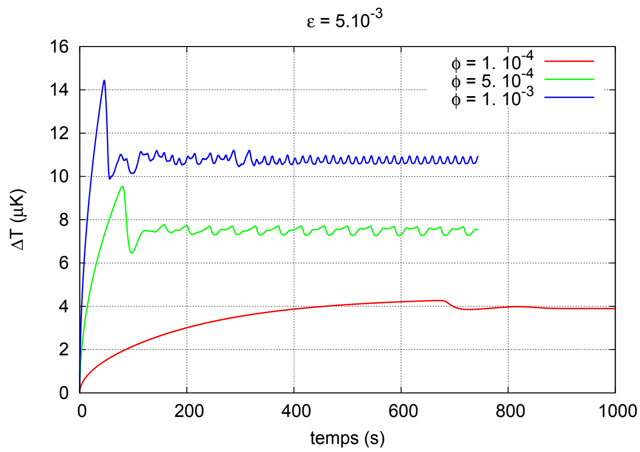

Figure 5: écart de température entre la paroi chauffée à flux constant et la paroi supérieure maintenue à température froide constante

Quelques caractéristiques numériques :
Les calculs ont été effectués pour des cavités de rapport de forme A=2. Le nombre de mailles dans la direction *z* est N_z = 128 et il est de N_x = 385 dans la direction *x*. Le pas de temps Δt est égal à $1/10^e$ du temps caractéristique de l'effet piston. Un calcul caractéristique comme ceux de la figure 5 nécessitent entre 30' et 1 heure de calcul sur une NEC SX8.

8. CONCLUSION

Nous avons présenté un modèle hydrodynamique des fluides supercritiques permettant d'étudier numériquement les écoulements de convection en configuration de Rayleigh-Bénard. Les équations sont établies en utilisant une approximation de type anélastique adaptée à un fluide très compressible, un modèle voisin du modèle « faible Mach » classique. Le modèle a permis de mettre en évidence le critère d'instabilité de Rayleigh-Schwarzchild pour le déclenchement de la convection. Par ailleurs, l'utilisation d'une loi d'état réelle pour décrire l'état de l'^{3}He a montré une meilleure concordance avec les résultats expérimentaux notamment en ce qui concerne l'instant où le régime convectif démarre.

Remerciements
Les calculs ont été effectués sur le calculateur NEC SX8 de l'IDRIS-CNRS dans le cadre du projet 1102

REFERENCES

1. A. Onuki, H. Hao & R.A. Ferrel, "*Fast adiabatic equilibration in a single –component fluid near the liquid-vapor critical point", Phys.Rev.A41, 1990, 2256-2259
2. B. Zappoli, S. Amiroudine, P. Carlès & J. Ouzzani, "*Thermoacoustic and buoyancy-driven transport in a square side-heated cavity filled with a near-critical fluid*", J. Fluid. Mech., vol. 316, 1996, 53-72
3. H. Meyer & A. Kogan, "*Onset of convection in a very compressible fluids: the transient toward steady state*", Phys. Rev. E, 66, 2002, 056310
4. A.Furukawa, H. Meyer, A. Onuki & A. B. Kogan, "*Convection in a very compressible fluid: Comparison of simulations with experiments*", Phys. Rev. E, **68,** 2003, 056309
5. P. Carlès & B. Ugurtas, "*The onset of free convection near the liquid-vapour critical point- part I: Stationary initial state*", Physica D 126, 1999, 69-82
6. L. El Khouri and P. Carlès, " *Transition convective dans les fluides supercritiques*", 16ème congrès de mécanique, Nice, sep. 2003
7. S. Amiroudine, P. Bontoux, P. Larroudé,B. Gilly & B. Zappoli, " *Direct numerical simulation of instabilities in a two-dimensional near-critical fluid layer heated from below*", J. Fluid Mech., Vol. 442, 2001, 119-140
8. V.I. Polezhaev & E.B. Soboleva, " *Rayleigh-Bénard convection in a near-critical fluid in the neighborhood of the stability threshold*", Fluid Dynamics, Vol. 442, 2005, 209-220
9. G. Accary, I. Raspo, P. Bontoux & B. Zappoli, " *An adaptation of the low Mach number approximation for supercritical fluid buoyant flows*", C. R.Mécanique 333, 2005, 397-404
10. S. Amiroudine& B. Zappoli, "Thermoconvective instabilities in supercritical fluids", CR Mécanique 332 , 2004
11. J.M. Hyman & M. Shashkov, "Natural discretization for the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids", Int. J. of Computers & Maths with applic., Vol. 33 , 4, 1997