

ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE VERTICALE PARTIELLEMENT ANNULAIRE

N. Retiel* et M. A. Medebber

Laboratoire de modélisation numérique et expérimentale des phénomènes mécaniques
Université de Mostaganem, Département de Mécanique B.P.300, Route Belhacel 27000 Mostaganem, Algérie.
retieln@yahoo.fr, amine_mg@yahoo.fr

RESUME : Ce travail concerne l'étude par simulation numérique basée sur la méthode des volumes finis de la convection naturelle laminaire dans une cavité cylindrique verticale partiellement annulaire bidimensionnelle, soumise à un gradient essentiellement horizontal de température. Deux séries de simulation sont effectuées tout d'abord, l'influence du nombre de Rayleigh, puis l'influence du rapport des hauteurs des deux cylindres, pour un rapport de rayons des cylindres fixé à 2, nombre de Prandtl égal à 7,0 et un rapport de forme de la cavité $A=1,0$.

NOMENCLATURE

a	Rapport de forme = $h/\Delta r$		U	Vitesse horizontale adimensionnée	
A	Rapport de forme = $H/\Delta r$		V	Vitesse verticale adimensionnée	
g	Accélération de la pesanteur	($m.s^{-2}$)	X	Rapport de hauteurs des cylindres= h/H	
h	Hauteur du cylindre intérieur	(m)	Y	Coordonnée axiale dimensionnée	(m)
H	Hauteur du cylindre extérieur	(m)	Y	Coordonnée axiale adimensionnée	
K	rapport des rayons = r_e/r_i		Symboles grecs		
Δr	Largeur de la cavité annulaire= r_e-r_i	(m)	α	Diffusivité thermique	($m^2.s^{-1}$)
Nu	Nombre de Nusselt		β	Coefficient d'expansion thermique	(K^{-1})
Pr	Nombre de Prandtl		ν	Viscosité cinématique	($m.s^{-2}$)
r	Coordonnée polaire dimensionnée	(m)	ρ	Densité du fluide	($kg.m^{-3}$)
Ra	Nombre de Rayleigh = $g\beta\Delta T\Delta r^3/\nu\alpha$		θ	Température adimensionnée	
R	Coordonnée polaire dimensionnée		λ	Conductivité thermique	($W/m.^{\circ}C$)
T	Température dimensionnée	($^{\circ}C$)	Indices		
ΔT	Ecart de température = T_c-T_f	($^{\circ}C$)	f: froid	c: chaud	i: interne e: externe

1. INTRODUCTION

La convection naturelle dans les cavités fermées a eu une attention pour son importance dans les applications technologiques, car elle offre un champ d'application privilégié dans le confort thermique, le refroidissement des composants électroniques, les réservoirs de stockage. Concernant la convection naturelle dans les cavités verticales annulaires, elle a été étudiée par plusieurs auteurs, citons en particulier les travaux de De Vahl Davis et al.[1] à des nombres de Rayleigh de l'ordre de $2 \cdot 10^5$. Une étude paramétrique faisant varier le nombre de Prandtl dans la gamme $0,5 < Pr < 5$ et un rapport de forme A entre 1 et 20 pour des rapports de rayons compris entre 1 et 4 leur a permis de conclure que le transfert de chaleur n'est pas seulement fonction du nombre de Rayleigh Ra et du rapport de forme A mais également du rapport des rayons K. Citons également les travaux de Schwab et Dewitt [2] qui ont calculé le nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de Ra, Pr et A et pour un rapport de rayon $K=2$, leurs résultats sont 30 à 50% supérieurs à ceux de De Vahl Davis et al.[1]. Lorsque K augmente fortement, la courbure de la paroi extérieure n'aura plus d'influence sur l'écoulement dans le coeur de la cavité, il sera alors assimilé à un écoulement de couche limite autour d'un cylindre vertical chaud, c'est d'ailleurs la conclusion à laquelle aboutit Prasad [3] dans une autre étude dans laquelle il considère cela à partir de $K > 20$. Contrairement aux études précédentes qui se sont principalement intéressés à la détermination du transfert de chaleur, Lee, Korpela et Horne [4] ont concentré leurs travaux sur la structure d'écoulement, notamment sur l'observation de régimes multicellulaires à $Pr=0,71$. Prasad et Kulacki [5] sont

les premiers à avoir étudié expérimentalement l'effet de la courbure sur la convection en cavité annulaire, l'influence du rapport des rayons de la cavité annulaire γ est étudiée à des nombres de Rayleigh compris entre $8 \cdot 10^6$ et $3 \cdot 10^{10}$. Une de leurs constatations est que la distribution de température au milieu de la cavité annulaire ($K=5,338$) varie entre 0,23 et 0,11 selon la valeur des paramètres Ra , A et Pr , alors qu'elle vaut 0,5 lorsqu'il s'agit d'une cavité rectangulaire ($K=1$). Ils observent également qu'au fur et à mesure que la courbure de la cavité augmente, le fluide chaud s'accumule au voisinage de la paroi intérieure (chaude), il en résulte un faible gradient vertical de température dans la zone inférieure de la cavité et un fort gradient au niveau de la zone supérieure. Qualitativement, cela a été également obtenu par De Vahl Davis et al.[1], Schwab et al.[2], Lee et al.[4] et Kumar et al. [7]. Parmi les aspects intéressants de l'effet de la courbure, ils ont pu noter la diminution de température à l'intérieur de la couche limite, près de la paroi intérieure (chaude). Lorsque $K>1$, cette diminution est due à l'importance du transfert de chaleur près de la paroi intérieure. Parmi les travaux les plus récents sur la convection naturelle dans les cavités annulaire verticales, on peut citer ceux de K. Choukairy et al. [8] où ils ont étudié le couplage de la conduction thermique à travers le cylindre intérieur avec la convection naturelle dans l'espace annulaire. Les auteurs ont mis en évidence l'effet de l'épaisseur et de la conductivité thermique du cylindre intérieur sur le transfert de chaleur dans la cavité. Un travail similaire a été effectué par Venkata Reddy et al. [9] où ils ont étudié la convection naturelle dans un espace annulaire verticale en présence d'un flux de chaleur généré par le cylindre intérieur le long de son axe de symétrie.

Nous pouvons remarquer que la majorité des travaux effectués se sont intéressés aux effets des paramètres géométriques (rapport de forme A et rapport des rayons K). Nous avons jugé utile d'étudier l'effet d'un autre paramètre géométrique qui est la variation du rapport de la hauteur du cylindre intérieur sur le cylindre extérieur dont la valeur a été fixée à l'unité dans tous les travaux cités ci-dessus. Notre travail consiste donc à étudier la convection naturelle dans une cavité cylindrique partiellement annulaire où les résultats montrent l'influence du rapport des hauteurs $X=h/H$, ($0 \leq X \leq 1$), pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ en fixant $A=1$, $K=2$ et $Pr=7,0$

2. MODELE PHYSIQUE ET METHODE NUMERIQUE

Le domaine étudié consiste en l'espace entre deux cylindres coaxiaux verticaux de hauteurs différentes dont les parois verticales sont maintenues à des températures chaude T_c et froide T_f alors que les parois horizontales inférieure et supérieure sont supposées adiabatiques, par contre la paroi horizontale intermédiaire est à la même température que le cylindre intérieur (Fig1). Le fluide est supposé newtonien et l'écoulement incompressible, les propriétés physiques, la viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique α sont constantes sauf pour la masse volumique qui dépend de sa température (approximation de Boussinesq) selon la relation suivante:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$$

En considérant une symétrie par rapport à l'axe vertical, et en utilisant la longueur de référence $\Delta r = r_e - r_i$, la vitesse de référence ($V_f = \nu / \Delta r$), et la différence de température $\Delta T = T_c - T_f$, comme grandeurs caractéristiques pour adimensionner notre modèle mathématique.

Le modèle mathématique obtenu est :

Equation de continuité:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

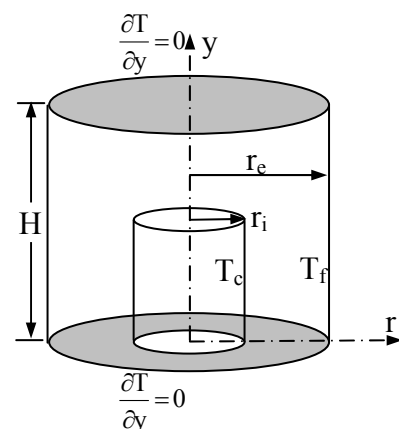


Figure 1: Modèle physique

Equation de quantité de mouvement radial :

$$U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2)$$

Equation de quantité de mouvement axial :

$$U \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{Ra}{Pr} \theta \quad (3)$$

Equation d'énergie :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial R} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (4)$$

Les paramètres caractéristiques qui interviennent dans les équations adimensionnelles ci-dessus et dont les valeurs conditionnent les transferts de chaleur dans la cavité sont :

Les paramètres géométriques :

$$A=H/\Delta r, a=h/\Delta r, X=h/H=a/A \text{ et } K=r_o/r_i$$

Les paramètres physiques :

$$\text{Le nombre de Rayleigh : } Ra = \frac{g\beta\Delta T\Delta r^3}{\nu\alpha} \text{ et le nombre de Prandtl : } Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} \text{À } R=1/(K-1) : \quad \theta=0,5 \text{ et } U=V=0 & \quad \text{et} \quad \text{à } R=K/(K-1) : \quad \theta=-0,5 \text{ et } U=V=0 \\ \text{À } Y=0,A : \quad \partial\theta/\partial Y=0 \text{ et } U=V=0 & \quad \text{et} \quad \text{à } Y=XA \text{ et } 0 \leq R \leq 1/(K-1) : \quad \theta=0,5 \text{ et } U=V=0 \end{aligned}$$

3. METHODE NUMERIQUE

Le modèle numérique utilisé pour résoudre le système d'équations est fondé sur la méthode des volumes finis en utilisant l'algorithme SIMPLER développée par Patankar [6], cette méthode s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul en différents nœuds, chacune d'entre eux étant entouré d'un volume élémentaire sur lequel on intègre les équations aux dérivées partielles. Les systèmes obtenus sont résolus par l'algorithme TDMA. Le maillage est irrégulier très raffiné sur les parois et grossier dans le milieu de l'espace étudié.

4. RESULTATS ET DISCUSSION

4.1 Influence du nombre de Rayleigh:

Le paramètre principal qui gouverne l'écoulement convectif est le nombre de Rayleigh, il permet de comparer les forces de flottabilité (force d'Archimède) aux forces visqueuses et il est proportionnel au gradient de température appliqué.

Les champs de température ainsi que les champs de vitesses sont montrés dans les figures 2 et 3 pour un nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^6 . Ainsi pour $Ra=10^3$, les sollicitations thermiques sont assez faibles pour pouvoir varier la densité du fluide et provoquer le mouvement des particules, le transfert de chaleur s'effectue alors uniquement par conduction thermique, c'est pourquoi on observe un champ de vitesse très faible et une stratification presque horizontale des isothermes (Fig.2). Lorsque les forces de poussées thermiques deviennent plus importantes avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, on constate que les isothermes commencent à se tordre au fur et à mesure qu'on s'approche de l'espace annulaire où les particules s'accroissent en circulant dans le sens des aiguilles d'une montre; ascendantes près de la paroi chaude et descendante près de la paroi froide. Nous remarquons que les

isothermes se resserrent à côté des parois verticales des deux cylindres où le gradient de température est important. L'augmentation du nombre de Rayleigh jusqu'à $Ra=10^6$ engendre un gradient de température très fort aux voisinages des parois verticales (Fig.3), ce qui signifie un échange thermique convectif croissant avec l'accroissement du nombre de Rayleigh. Effectivement lorsqu'on analyse le champ de vitesse, on constate que pour $10^3 \leq Ra \leq 10^4$, les vitesses sont faibles au milieu de la cavité ($Y=0,5$ et $R=1,5$) et presque négligeable dans l'intervalle $0 < R < 1$. Par contre, l'écoulement commence à se développer avec l'augmentation du nombre de Rayleigh ($10^5 \leq Ra \leq 10^6$), où les particules de fluide s'accélèrent précisément au voisinage des parois et les vitesses commencent à devenir plus importantes sur la partie supérieure du cylindre intérieur (Fig.3). On peut également constater d'après le champ de vitesses que l'écoulement est de plus en plus intense en s'approchant des parois, principalement lorsqu'on fait accroître le nombre de Rayleigh, et donc les vitesses sont toujours maximales au voisinage des parois verticales. Donc, on peut conclure que l'augmentation du nombre de Rayleigh à partir $Ra \geq 10^4$ accentue l'effet convectif du transfert de chaleur (Fig.4).

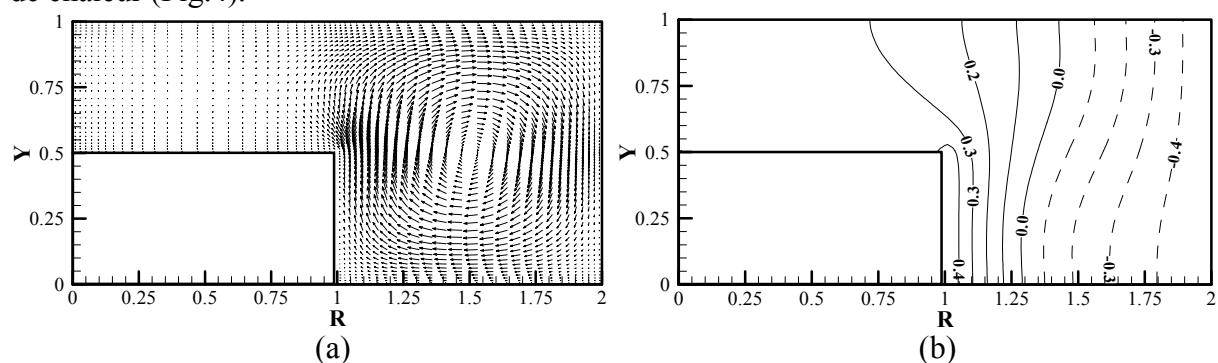


Fig.2 : Champ de vitesse (a) et distribution de température (b) pour $Ra=10^3$
($A=1, K=2, X=0,5, Pr=7,0$)

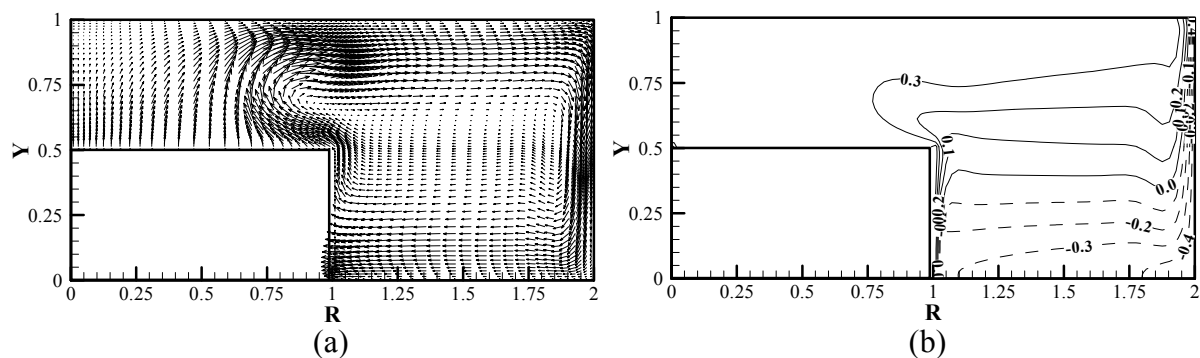


Fig.3 : Champ de vitesse et distribution de température pour $Ra=10^6$
($A=1, K=2, X=0,5, Pr=7,0$)

4.2. Effet du rapport de hauteur

Nous avons considéré différentes hauteurs dans le rapport de hauteurs des deux cylindres verticaux de la cavité en les faisant varier entre $0 \leq X \leq 0,75$, pour $Ra=10^5$, $K=2$, $A=1,0$ et $Pr=7,0$. Nous avons constaté que l'échange thermique convectif augmente avec l'augmentation de la hauteur, ce transfert de chaleur est animé par un gradient de température. Lorsque $X=0,75$ (Fig.5), on remarque la présence d'un gradient de température uniquement dans la zone $1 \leq R \leq 2$ et $-2 \leq R \leq -1$ et l'installation d'une zone isotherme au dessus du cylindre intérieur qui l'isole thermiquement, par contre lorsque X diminue ($X=0,25$) un gradient de température se développe dans cette zone ($-1 \leq R \leq 1$), qui induit un écoulement bien animé

dans cette partie et provoque un échange thermique important (Fig.4). Concernant les vitesses, on a vu que pour un rapport de hauteur compris entre 0,75 et 0,25 les particules de fluide s'accroissent dans la partie $-2 \leq R \leq -1$ et $1 \leq R \leq 2$ et elles ont presque nulle dans la zone $-1 \leq R \leq 1$ (Fig.5), mais lorsque X diminue jusqu'à 0,25, les vitesses augmentent dans la zone $-1 \leq R \leq 1$ (Fig.4).

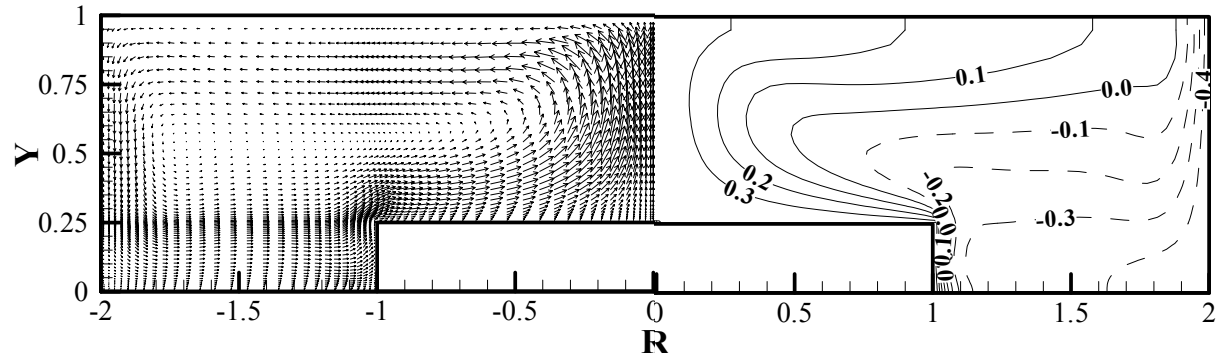


Fig.4 : Champ de vitesses et isothermes pour X=0,25
($Ra=10^5$, $A=1,0$, $K=2$, $Pr=7,0$)

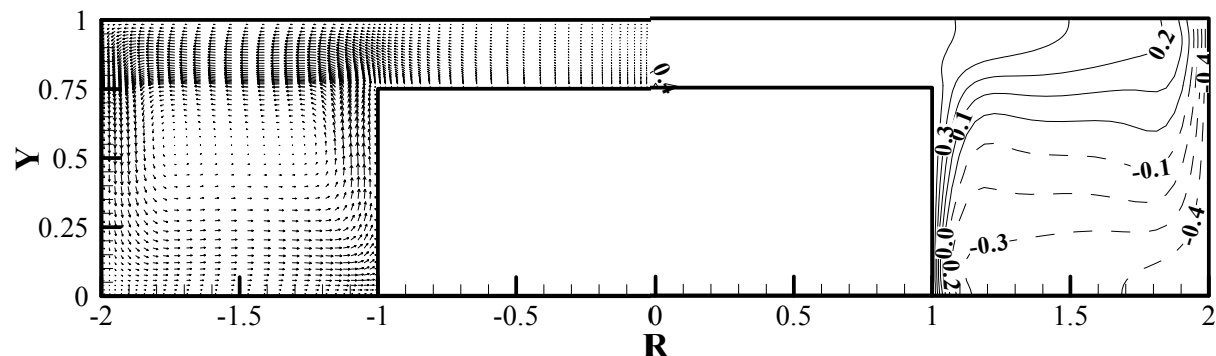


Fig.5 : Champ de vitesses et isothermes pour X=0,75
($Ra=10^5$, $A=1,0$, $K=2$, $Pr=7,0$)

4.3. Influence de Ra et de rapport de hauteur sur le transfert de chaleur.

La figure 6 montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre du Rayleigh pour différentes valeurs des rapports de hauteurs des cylindres X. Nous remarquons que pour des valeurs croissantes de X le transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation de Ra ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$), par contre dans un régime bien développé, on remarque que la courbe du rapport X=0.5 coupe les deux courbes X=0,75 et X=1, se qui signifie que pour X=0,5 le transfert de chaleur atteint son maximum en régime convectif ($Ra=10^6$), car il y'a deux surfaces d'échange thermique, une est vertical cylindrique $S_1=2\pi r_1 h$ et l'autre est horizontal circulaire $S_2=\pi r_1^2$, l'effet de section horizontale est bien présent lorsque $0 \leq X \leq 0,5$ et contrairement quant X augmente $0,75 \leq X \leq 1$, car dans cet intervalle la section horizontale devient de plus en plus isoler, jusqu'à atteindre une zone adiabatique. La figure 7 montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du rapport des hauteurs X pour différentes valeurs du nombre du Rayleigh. Le transfert convectif croit avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Lorsque l'écoulement est lent pour les faible valeurs de Ra ($Ra=10^3$ et $Ra=10^4$) le transfert convectif est presque faible et il est indépendant de la hauteur du cylindre intérieur car le nombre de Nusselt reste constant pour plusieurs valeurs de X, par contre lorsque les forces de poussée thermique devienne plus importante ($Ra=10^5$ et $Ra=10^6$), la variation du nombre de Nusselt est bien marqué avec l'augmentation du nombre de Rayleigh ($Ra=10^6$). La variation est maximale à la valeur X=0,5. Donc, on peut conclure que lorsqu'on fait augmenter

la hauteur du cylindre intérieur, on passe par une valeur intermédiaire qui favorise le transfert de chaleur.

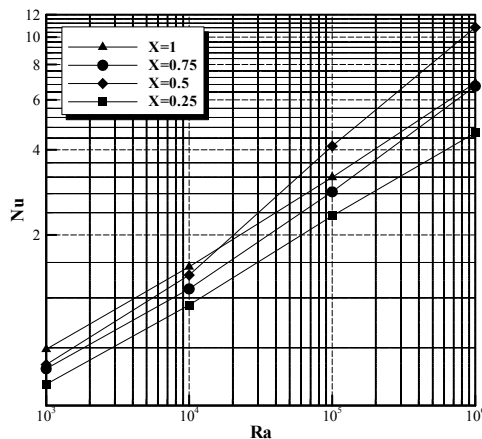


Fig.6 : Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de X

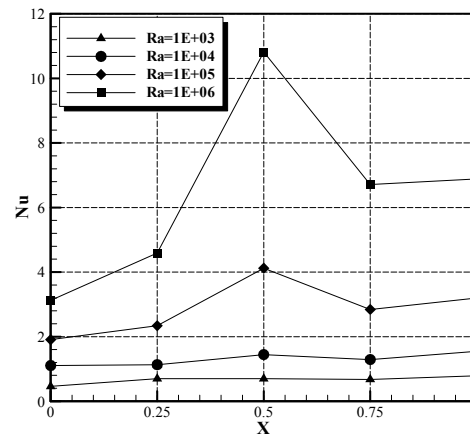


Fig.7 : Nombre de Nusselt en fonction du rapport de hauteur X pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh

5. CONCLUSION

L'objectif de cette étude est de mettre en évidence l'effet de la de la hauteur du cylindre intérieur et le nombre de Rayleigh Ra sur la convection naturelle dans une cavité cylindrique verticale rempli d'un fluide newtonien. Les résultats qui ont été obtenus à l'aide d'un modèle mathématique, nous a permis de déterminer de prédire les champs de vitesses et la distribution de température en régime permanent de plusieurs configurations. Ces résultats nous ont également permis la caractérisation du transfert de chaleur par convection naturelle naturel dans une cavité cylindrique verticale partiellement annulaire différentiellement chauffée, où l'augmentation du nombre de Rayleigh à partir $Ra \geq 10^4$ accentue l'effet convectif du transfert de chaleur. Mais le résultat le plus intéressant, est l'existence d'une hauteur optimale du cylindre intérieur qui favorise le transfert de chaleur.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. G. de Vahl Davis and R. W. Thomas, 1969, Natural Convection between Concentric Vertical Cylinders, *Physics of Fluids, Suppl.II*, pp. 198–207.
2. T. H. Schwab, K. J. Dewitt, 1970, Numerical investigation of free convection between two vertical coaxial cylinders, *AIChE Journal*, Vol. 16, pp.1005-1010.
- 3 V.Prasad, 1986, Numerical study of natural convection in a vertical, porous annulus with constant heat flux on the inner wall, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.29, n°6, p.841-853.
- 4 Y. Lee, S. A. Korpela, R. N. Horne, 1982, Structure of multicellular natural convection in a tall vertical annulus, *Proceedings 7th. Heat Transfer Conference*, Vol. 2, Munich.
5. V. Prasad, F. A. Kulacki, 1985, Free convective heat transfer in a liquid-filled vertical annulus, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol.107, pp.596-602.
6. S. V. Patankar, Numerical Heat transfer and fluid flow, 1980, *Hemisphere, Washington*.
7. R.Kumar, M.A.Kalam,1991, Laminar thermal convection between vertical coaxial isothermal cylinders, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.34,n°2,p.513-524.
8. K.Choukairy, R.Bennacer, P.Vasseur, 2004, Natural convection in a vertical annulus boarded by an inner wall of finite thickness, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, n°4, p.501-512.
9. P.Venkata Reddy, G. Narasimham,2008,Natural convection in a vertical annulus driven by a central heat generating rod, *Int. Journal Heat and Mass Transfer*, Vol.51, p.5024–5032.