

ETUDE NUMERIQUE DE L'EFFET DES PARAMETRES GEOMETRIQUES SUR LA MAGNETOCONVECTION DANS UNE CAVITE ANNULAIRE

A. Elamari*, H. Jamai, F. S. Oueslati, H. Sammouda² et A. Belghith,
LETTM, Département de physique, F.S.Tunis, Tunisie.
² *ESST-H. Sousse*
adel.elamari@fst.rnu.tn

RESUME

Une étude numérique de l'écoulement convectif, d'un fluide métal liquide dans une cavité annulaire verticale différentiellement chauffés en présence d'un champ magnétique constant est présentée. Dans cette configuration, le fluide est simultanément soumis à la force de gravité ainsi qu'à la force de Laplace. Le nombre de Rayleigh, et le nombre de Hartmann, sont fixés successivement aux valeurs 10^4 et 100 pour lesquels les effets magnétique et thermique sont du même ordre de grandeur. L'écoulement, considéré laminaire et axisymétrique, est analysé en fonction du rapport de forme A de la cavité et le rapport des rayons k. Les résultats de cette étude montrent que le champ magnétique imposé engendre des modifications importantes sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique s'y produisant dépendant de la direction du champ magnétique et des paramètres géométriques de la cavité.

Mots clés : magnéto-convection, métaux liquides, cavité annulaire.

NOMENCLATURE

$A = \frac{H}{L}$ Rapport de forme	$Pr = \nu/\alpha$ Nombre de Prandtl
\vec{B} : Vecteur champ magnétique (T)	$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu \alpha}$ Nombre de Rayleigh
\vec{g} : Vecteur accélération de la pesanteur (m/s ²)	t : Temps adimensionnel
H : Hauteur de la cavité cylindrique (m)	T : Température adimensionnelle
$Ha = L.B \cdot \sqrt{(\sigma/\mu)}$ Nombre de Hartmann	r,z : Coordonnées adimensionnelles
\vec{j} Vecteur densité de courant électrique adimensionnel	u,w : Vitesses adimensionnelles suivant les directions r, z
$k = \frac{R_2}{R_1}$ Rapport des rayons	Lettres grecques
$L = R_2 - R_1$ Différence des deux rayons (m)	α : Diffusivité thermique (m ² /s)
p : Pression motrice adimensionnelle	β : Coefficient de dilatation volumique (1/k)
	ρ : Masse volumique (kg/m ³)
	μ : Viscosité dynamique (kg/m.s)
	σ : Conductivité électrique (S/m)

1. INTRODUCTION

L'intérêt de la magnétoconvection réside dans sa présence dans de nombreux phénomènes naturels et appliqués. En effets plusieurs phénomènes en astrophysique (convection solaire, phénomènes interstellaires...), en géophysique (la convection au cœur des planètes, phénomènes de dynamo...) sont des phénomènes de magnétoconvection non définitivement compris [1,2]. De même l'industrie métallurgique, le refroidissement des réacteurs nucléaires, la croissance cristalline pour l'industrie des semi-conducteurs, posent plusieurs questions à développer pour le contrôle de la stabilité de ces écoulements [3]. En effet, l'apparition de la convection pendant la croissance cristalline peut conduire à des inhomogénéités donc à des striations et à des défauts affectant la qualité des cristaux obtenus. Dans ces cas, la superposition d'un champ magnétique à la convection thermique paraît de grande importance pour le contrôle de la stabilité de ces écoulements et des transferts thermiques en

résultant. De ce fait, la littérature s'intéressant à ce sujet est abondante [1,2,4] mais la configuration cylindrique reste non richement étudiée malgré que la majorité des applications industrielles se produisent dans des cavités cylindriques [5,6].

Dans cet optique, nous proposons une étude numérique de l'écoulement convectif, d'un métal liquide, de faible nombre de Prandtl et conducteur de courant électrique, dans une cavité annulaire verticale formée par deux cylindres coaxiaux différentiellement chauffés en présence d'un champ magnétique constant de direction radiale puis axiale.

2. FORMULATION DU PROBLEME

La configuration étudiée, décrite plus haut, est présentée par la figure 1. Le cylindre intérieur, de rayon R_1 , est porté à une température chaude T'_1 , le cylindre extérieur, de rayon R_2 , est maintenu à une température froide T'_2 , les parois horizontales sont considérées adiabatiques.

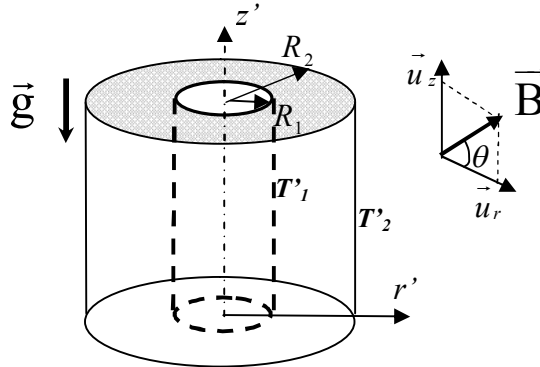


Figure 1. Configuration géométrique étudiée

Dans cette configuration, le fluide est simultanément soumis à la force de gravité et la force de Laplace résultant de la convection du fluide conducteur dans le champ magnétique. Un couplage est présent entre les phénomènes hydrodynamique et magnétique et la modélisation de l'écoulement fait intervenir en plus des équations de Navier Stokes et celle de la conservation d'énergie, la loi d'Ohm généralisée ou l'équation de conservation de la charge électrique. Ces équations sont écrites en variables primitives, vitesse-pression, sous l'hypothèse d'axisymétrie, en adoptant l'approximation de Boussinesq et en négligeant le champ magnétique induit, sous leur forme adimensionnelle comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + \text{Pr} \cdot \text{Ha}^2 \left(\vec{j} \wedge \vec{e}_B \right) \vec{u}_r \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\text{Pr} \text{Ra}) T + \text{Pr} \cdot \text{Ha}^2 \left(\vec{j} \wedge \vec{e}_B \right) \vec{u}_z \quad (3)$$

$$\vec{j} = (-\vec{\nabla} \phi + \vec{V} \wedge \vec{e}_B) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

avec \vec{e}_B le vecteur unitaire suivant la direction du champ \vec{B} et $\text{Ra} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu \alpha}$, $\text{Ha} = L \cdot B \cdot \sqrt{(\sigma/\mu)}$,

et $\text{Pr} = \nu/\alpha$ les nombres adimensionnels rendant compte respectivement des effets thermiques, magnétiques et des propriétés du fluide. En plus de ces paramètres le problème est régi par le rapport de forme de la cavité $A = \frac{H}{L}$ et le rapport des rayons $k = \frac{R_2}{R_1}$ rendant compte d'une particularité de la cavité annulaire qui est la courbure.

On adopte les conditions aux limites de non glissement pour la vitesse : $u=w=0$, la température est imposée sur les parois verticales : $T = T_1$ en $r=R_1$, $T = T_2$ en $r=R_2$ et les parois horizontales sont considérées adiabatiques : $\partial T / \partial z = 0$ en $z = 0, A$. Electriquement, toutes les parois sont considérées isolantes : $\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$.

La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation spatiale des équations. Après formulation du problème, la modélisation est faite à travers le code FEMLAB permettant un couplage entre les grandeurs dynamiques, thermiques et électriques. Un choix adéquat des interpolations des différentes grandeurs permettant la convergence du modèle est fait. Différents maillages du domaine sont testés, Les résultats présentés sont obtenus par un maillage triangulaire de 4896 éléments raffinés près des parois actives.

3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

On considère comme fluide le silicium, de nombre de Prandtl = 0.054, le nombre de Rayleigh et le nombre de Hartmann, sont fixés successivement aux valeurs 10^4 et 100. Le rapport de forme de la cavité A est varié entre les valeurs 0.25 et 2, et le rapport des rayons k, est varié entre 1.1 et 11. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de profils, de champs dynamique et thermique illustrant les régimes du mouvement du fluide ainsi que le transfert thermique à l'intérieur de l'enceinte.

3.1 Effet du champ magnétique

Pour étudier l'effet du champ magnétique sur l'écoulement convectif dans la cavité annulaire, deux cas particulier sont considérés, cas où le champ magnétique est axial, $\vec{e}_B = \vec{u}_z$ ($\theta = \pi/2$), et la cas où le champ magnétique est radial, $\vec{e}_B = \vec{u}_r$ ($\theta = 0$).

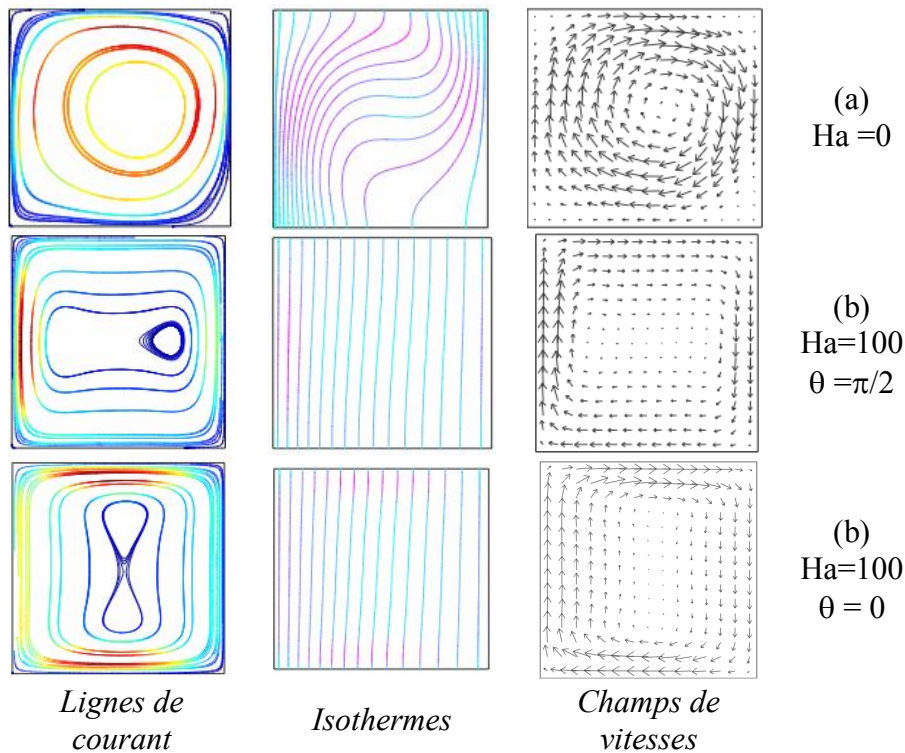


Figure 2 : Champs dynamiques, thermiques et de vitesses pour différentes valeurs de Hartmann, $A = 1, k=2, Ra = 10^4$.

Nous présentons sur la Figure 2, les lignes de courant, les isothermes et les champs de vitesses pour $Ra = 10^4, k=2$ et $A = 1$ et pour les deux directions du champ magnétique. En absence du champ magnétique ($Ha = 0$, Fig.2(a)), l'écoulement est convectif montrant une simple circulation montant le long de la paroi chaude et descendant le long de celle froide et une stratification thermique quasi-

horizontale dans la région centrale. Lorsque le champ magnétique est axial, à mesure que son intensité augmente, les lignes de courant centrales sont prolongées horizontalement créant, au milieu, une région de faible vitesse de l'écoulement (Fig.2(b)). Lorsque il est radial, on observe le même phénomène d'étirement de la structure mais dans la direction verticale (Fig.2(c)). Dans les deux cas, la stratification verticale de la température dans le cœur de la cavité diminue et les isothermes deviennent quasi parallèles et verticales montrant un régime conductif de l'écoulement. la figure 3 relatives aux profils des vitesses verticale et horizontale dans les plans médians respectivement horizontal et vertical, pour différentes valeurs de Hartmann et pour les deux orientations du champ magnétique, illustrent bien ce constat. En effet la valeur maximale de chacune des composantes de la vitesse diminuent considérablement en augmentant la valeur de Ha et ce dans les deux cas d'orientation du champ magnétique.

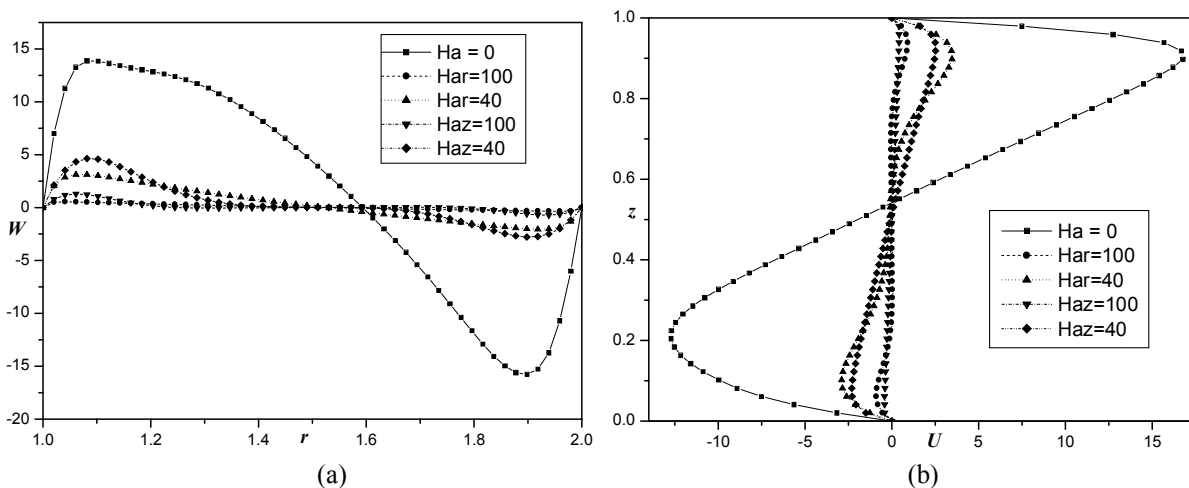


Figure 3: Profils de vitesses verticales (a) et (b) horizontales respectivement dans les plans médians horizontal et vertical, $A = 1$, $k=2$, $Ra = 10^4$ pour différents Hartmann.

Ces résultats montrent que la force magnétique s'oppose à celle thermique, produisant globalement le même effet dans les deux cas, ainsi le régime de l'écoulement redevient conductif pour des valeurs relativement élevées du nombre de Rayleigh. Toutefois, une différence est notée dans le sens d'étirement entre les deux cas. En effet, un champ magnétique radial s'oppose à la force thermique horizontalement et par conséquent l'écoulement est freiné suivant cette direction. Inversement, un champ magnétique axial freine l'écoulement ascendant et descendant et une recirculation se produit au niveau des deux moitiés haut et bas de la cavité. On note bien, d'après la figure 3, que pour la même valeur du nombre de Hartmann, la valeur maximale de la composante verticale de la vitesse (w) est plus réduite par un champ magnétique radial, alors que celle de la composante horizontale (u) est plus réduite par un champ magnétique axial.

3.2 Effet du rapport de forme A

Pour examiner l'effet de l'allongement de la cavité, On présente sur la figure 4 les champs dynamique et thermique, pour des allongements dans la direction horizontale ($A = 0.25$) et verticale ($A = 2$) pour les deux directions du champ magnétique. La figure montre que pour une cavité allongée horizontalement l'intensité de l'écoulement ainsi que le champ thermique sont affectés plus par le champ magnétique axial, alors qu'un champ magnétique radial freine plus le mouvement et le transfert thermique dans le cas d'une cavité allongée verticalement. Ce résultat est attendu et confirme que la force magnétique s'oppose au mouvement suivant la direction perpendiculaire au champ. Ainsi un champ radial a plus d'effet lorsque les parois verticales sont allongées et inversement pour un champ magnétique axial. Ces résultats sont bien confirmés par les profils des vitesses et leurs valeurs extrémales (non présentés ici).

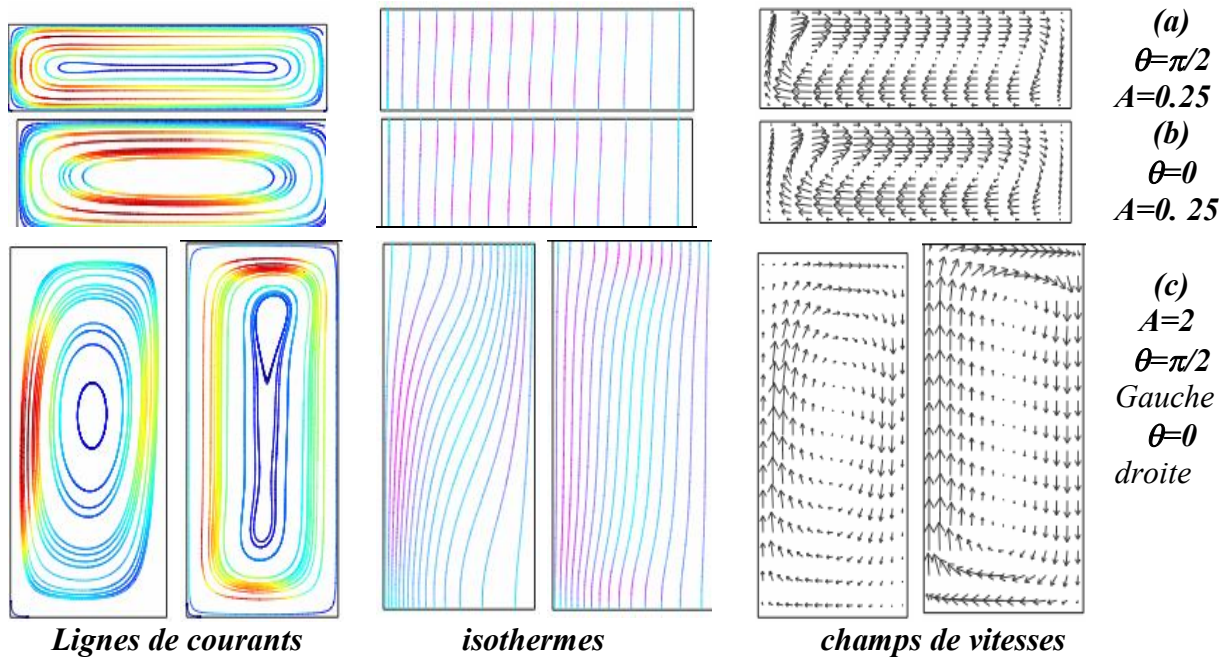


Figure 4 : Champs, dynamique, thermique et de vitesse pour différentes valeurs du rapport de formes, $k=2$ $Ra = 104$ et $Ha= 40$.

3.4 Effet de la courbure de la cavité (Rapport des rayons k)

Nous rappelons sur la figure 6 les deux configurations limites d'une cavité à faible courbure (a) correspondant à un rapport de rayons k légèrement supérieur à l'unité, et une cavité à haute courbure (b), de rayon intérieur faible devant son rayon extérieur, k élevé.



Figure 5 a) cavité à faible courbure b) cavité à haute courbure

La figure 6 présente les champs de vitesse pour les deux cas de courbure de la cavité ($k= 1.1$ et $k = 11$), pour $Ha = 0$ et pour $Ha = 100$ et un champ magnétique axial ($Ha_z=100$) puis radial ($Ha_r=100$). En absence du champ magnétique ($Ha=0$, Fig.6(a)), On note bien la différence entre les deux structures de l'écoulement due à la courbure. Pour une cavité à faible courbure ($k= 1.1$), on retrouve une structure identique à celle obtenue dans une cavité parallélépipédique[7]. En effet, le champ de vitesse est strictement centro-symétrique constitué d'une cellule unique dont le centre coïncide avec celui de la cavité, de même que le profil de température correspondant. Pour une cavité à grande courbure ($k=11$), le champ de vitesse et le profil de température s'écartent nettement du cas d'une cavité cartésienne, et ne vérifient plus la propriété de centro-symétrie. En effet, l'écoulement est aussi constitué d'une cellule unique, mais, le centre de cette cellule s'écarte vers le cylindre extérieur. La montée du fluide, du côté de la paroi chaude, se produit sur une région plus étendue et sa descente reste plus limitée du côté du cylindre extérieur froid. En augmentant la courbure de la cavité, le gradient de température croît près du cylindre intérieur et décroît près du cylindre extérieur [8]. On imposant un champ magnétique, un étirement de la structure se produit comme expliqué précédemment horizontalement lorsque le champ est axial et verticalement lorsqu'il est radial. La centrosymétrie est vérifiée pour une faible courbure et non vérifiée pour une haute courbure. L'écoulement est fortement atténué pour les valeurs élevées de Hartmann et le régime est conducteur. Cet effet est confirmé par les profils de température où on note un profil linéaire pour $Ha = 100$ et $k = 1.1$, comme en régime conducteur dans une cavité parallélépipédique, et un profil logarithmique pour $Ha = 100$ et $k = 11$, comme en régime conducteur dans une cavité annulaire.

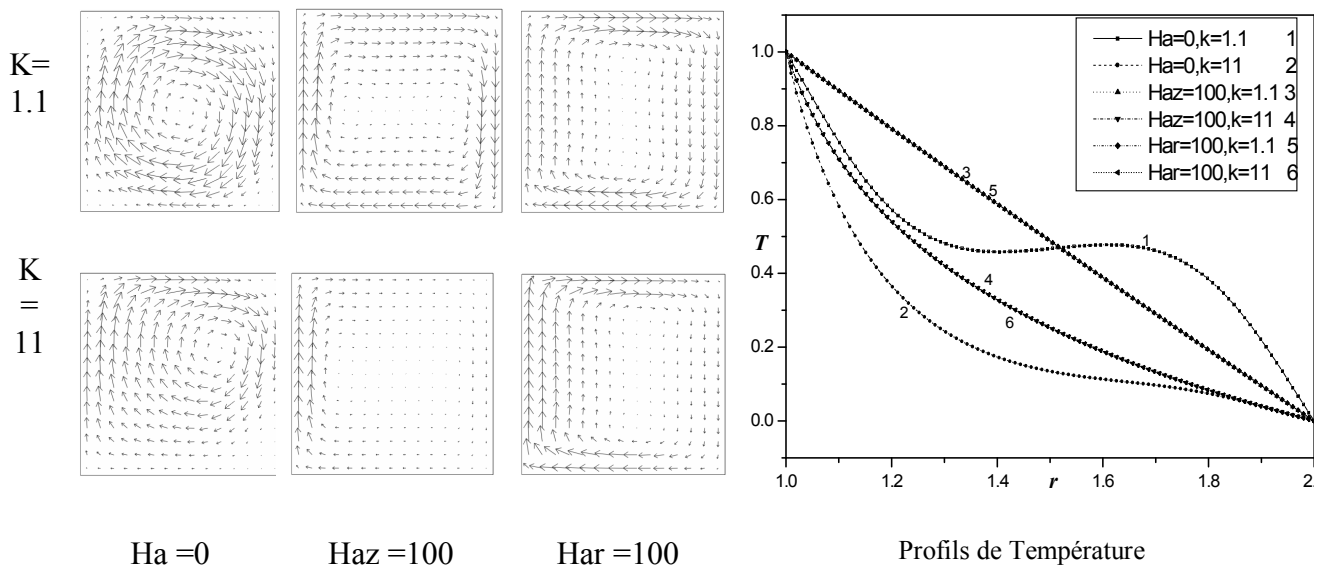


Figure 6 : Champ de vitesse, pour ($k = 1.1$ et $k = 11$), pour $Ha = 0$, $Haz = 100$ et $Har=100$ et profils de température pour les différents cas ($Ra = 10^4$ et $A = 1$).

4. CONCLUSION

Les résultats de cette étude montrent que le champ magnétique imposé affecte l'intensité de l'écoulement ainsi que le transfert thermique. Pour un champ magnétique radial ou axial, la force magnétique s'oppose à celle thermique et le régime de l'écoulement redevient conductif pour des valeurs relativement élevées du nombre de Rayleigh. Un champ magnétique axial freine l'écoulement dans le sens horizontal ce qui produit un étirement suivant cette direction et son effet est plus notable pour une cavité de rapport de forme $A < 1$. Inversement, un champ magnétique radial freine l'écoulement ascendant et descendant et aura plus d'effet pour $A > 1$. Pour une cavité à faible courbure la structure de l'écoulement et les profils de température sont centro-symétriques identiques à celles d'une cavité parallélépipédique avec un régime conductif en présence du champ magnétique. Pour une cavité à haute courbure, les structures s'écartent de la centro-symétrie avec un régime conductif et plus d'uniformisation de l'écoulement par le champ magnétique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. R. Möhner, U. Müller, 1999, A numerical investigation of three dimensional magnetoconvection in rectangular cavities. *Int. J. Heat Mass Transfer* 42, 1111-1121.
2. Bednarz T., Fornalik E., Tagawa T., Ozoe H., Szmyd J. S., 2005, Experimental and numerical analyses of magnetic convection of paramagnetic fluid in a cube heated and cooled from opposing vertical walls. *Int. J. Thermal Sc.*, 44, 933-943.
3. J.S. Walkera, D. Henry, H. BenHadid, 2002, Magnetic stabilization of the buoyant convection in the liquid-encapsulated Czochralski process. *J. of Crystal Growth* 243 108-116.
4. Krakov M.S., Nikiforov I.V., Reks A.G., 2005, Influence of the uniform magnetic field on natural convection in cubic enclosure: experiment and numerical simulation. *J. Magn. Mater.*, 289, 272-274.
5. Y. Inatomi, 2006, Buoyancy convection in cylindrical conducting melt with low Grashof number under uniform static magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transfer* 49 4821-4830.
6. M. Sankar, M. Venkatachallappa, I.S. Shivakumara, 2006, Effect of magnetic field on natural convection in a vertical cylindrical annulus. *Int. J. Eng. Sci.* 44 1556-1570.
7. De Vahl Davis G., 1983, Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 3, 249-264.
8. A. Elamari, 2004, Etude de la convection mixte entre deux cylindres coaxiaux entraînés par rotation. *Thèse de doctorat en Physique*, Fac. des Sciences de Tunis.