

# SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN GÉOMÉTRIE BIDIMENSIONNELLE COUPLAGE DES TRANSFERTS THERMIQUES FLUIDE/SOLIDE

S. Abide<sup>1\*</sup>, S. Viazzo<sup>2</sup>, C. Sollicec<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LAMPS-GME, Université de Perpignan, 52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan

<sup>2</sup> M2P2, Aix-Marseille Université, 38 rue F. Joliot-Curie, 13451 Marseille cedex 20

<sup>3</sup> DSEE/GEPEA, Ecole des Mines de Nantes, 4 rue Alfred Kastler, 44307 Nantes

\*stephane.abide@univ-perp.fr

## RESUME

Cette communication présente une étude numérique de la convection naturelle en géométrie bidimensionnelle dans une cavité dont les parois verticales sont différentiellement chauffées et les parois horizontales assimilées à deux plaques thermiquement conductrices. Le couplage thermique entre le fluide de la cavité et les plaques thermiquement conductrices est numériquement résolu par une méthode de décomposition de domaine. L'étude de la convection naturelle dans la cavité couvre une gamme de nombres de Rayleigh compris entre  $10^3$  et  $10^6$ , pour des rapports de conductivités thermiques solide/fluide compris entre  $10^{-4}$  et 1.

## NOMENCLATURE

### Symboles

T	température, (K)
C	capacité calorifique, ( $J.mole^{-1}.K^{-1}$ )
Pr	nombre de Prandtl
Ra	nombre de Rayleigh
u,v	composantes de vitesses

### Symboles Grec

$\theta$	température adimensionnée
$\lambda$	conductivité thermique ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )
$\Omega$	domaine de calcul
$\rho$	masse volumique, ( $Kg.m^{-3}$ )

### Exposants, Indices

f	domaine fluide
s	domaine solide

## 1. INTRODUCTION

Les transferts de chaleur par convection naturelle dans des enceintes fermées sont présents dans de nombreux procédés tels que les systèmes de stockage d'énergie, le refroidissement de composants électroniques, l'habitat...

Un nombre important de travaux porte sur la convection naturelle thermique se développant dans des enceintes différentiellement chauffées. L'un des objectifs de ces études est de caractériser les transferts thermiques pariétaux en fonction du gradient longitudinal de température. Généralement, la modélisation des transferts repose sur une hypothèse de parois adiabatiques, se traduisant mathématiquement par l'imposition d'un gradient de température nul. Or, pour certains procédés thermiques industriels, cette hypothèse d'adiabaticité des parois se révèle être mise en défaut. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte le couplage thermique entre le fluide et le solide afin d'éliminer l'hypothèse d'adiabaticité.

Ce travail propose une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée dont les parois verticales sont différentiellement chauffées et les parois horizontales assimilées à deux plaques thermiquement conductrices (fig. 1). La méthode développée pour résoudre le couplage des transferts thermiques fluide/solide repose sur une méthode multi-domaine. Dans un premier temps, la modélisation mathématique des phénomènes de transfert est présentée. La deuxième partie est consacrée à la présentation des méthodes numériques. En dernier lieu, l'influence du rapport des conductivités thermiques solide/fluide sur les transferts thermiques pariétaux est présentée.

## 2. MODELISATION

### 2.1. Ecoulement et transferts dans la cavité

On considère un fluide newtonien dans une cavité différentiellement chauffée (fig.1). L'hypothèse de Boussinesq est admise pour prendre en compte les variations de masse volumique sans violer l'hypothèse d'incompressibilité du fluide.

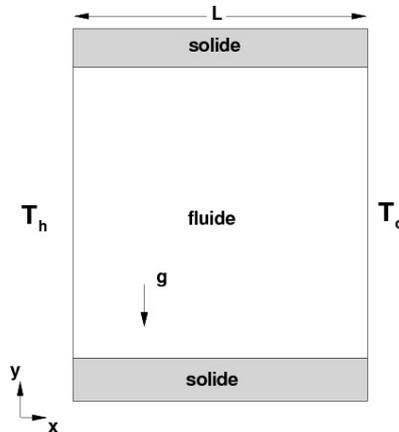


Figure 1 : Domaine de calcul.

Compte tenu des faibles écarts de température mis en jeu, le coefficient de dilatation thermique, la viscosité et la diffusivité thermique ne varient pas avec la température. Si l'on prend comme longueur de référence la largeur de la cavité, la formulation adimensionnelle en géométrie bidimensionnelle des équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Ra \text{Pr} \theta_f \\ \frac{\partial \theta_f}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_f}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Ce système est défini dans le domaine fluide  $\Omega_f$ . Les conditions aux limites de ce problème sont : l'adhérence à la paroi pour la quantité de mouvement, la température imposée sur les parois verticales et les conditions aux limites résultant du couplage thermique sur les parois horizontales. Ce dernier point est abordé dans la section suivante.

### 2.2. Modélisation du couplage des transferts thermiques fluide/solide

Le couplage des transferts thermiques est effectif sur les parois supérieure et inférieure de la cavité, où on suppose un contact parfait entre le fluide et le solide : la température et la densité de flux sont continues aux interfaces fluide/solide. Les transferts thermiques dans les deux domaines solides sont gouvernés par simple diffusion isotrope. La diffusion thermique et le couplage des transferts thermiques sont modélisés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} &= \frac{\lambda_s / \lambda_f}{\rho_s C_s / \rho_f C_f} \left( \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2} \right) \text{ sur } \Omega_s \\ -\lambda_f \frac{\partial \theta_s}{\partial n} &= -\lambda_f \frac{\partial \theta_f}{\partial n} \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \\ \theta_s &= \theta_f \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \end{aligned} \quad (2)$$

Les conditions aux limites à l'interface sont imposées simultanément dans les domaines fluide et solide. L'algorithme présenté ci-après permet de satisfaire cette condition. De plus, dans le cadre d'une discrétisation spatiale d'ordre élevé, cette technique ne dégrade pas l'ordre global du schéma.

### 3. METHODE NUMERIQUE

#### 3.1. Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Le système (1) est discrétisé temporellement par une méthode à pas fractionnaire semi-implicite. Les termes convectifs de l'équation de quantité de mouvement et de l'énergie, sont discrétisés par la méthode explicite d'Adams-Bashforth. Les termes diffusifs sont avancés en temps par la méthode implicite de Crank-Nicolson. Le découplage vitesse/pression est assuré par l'algorithme de projection de Kim et Moin [1]. Les inconnues de vitesse et de pression sont disposées sur un maillage entrelacé. La discrétisation spatiale associée à ce maillage est basée sur les schémas compacts d'ordre 4 [2]. Les termes implicites de diffusion dans les domaines fluide et solides sont inversés par une méthode de diagonalisation complète.

#### 3.2. Le couplage des transferts thermiques fluide/solide

La méthode proposée permettant d'assurer la continuité de la température et de la densité de flux à l'interface, repose sur une technique de matrice d'influence. Cette méthode a été développée entre autre par I. Raspo [3] dans le cadre d'une formulation fonction de courant/vorticité et par S. Abide et S. Viazzo [4] dans le cadre d'une formulation vitesse/pression des équations de Navier-Stokes. L'idée directrice de cette technique est d'utiliser la propriété de linéarité de l'opérateur de diffusion, dans le but de construire une matrice d'influence traduisant les conditions de continuité de la solution. L'inversion du système linéaire associé à cette matrice d'influence permet de déterminer les valeurs à imposer à l'interface garantissant la régularité de la solution. Cet algorithme est détaillé dans [3] et [4]. L'intérêt de cette technique, par rapport à la plupart des méthodes itératives, est de conserver la précision spatiale des schémas compacts.

### 4. RESULTATS

#### 4.1. Convection naturelle sans couplage fluide/solide des transferts thermiques

L'écoulement de la cavité différentiellement chauffée est gouverné par la force volumique de pesanteur. L'intensité de son effet sur l'écoulement est caractérisée par le nombre de Rayleigh Ra. Après une étude de sensibilité de maillage pour les nombres de Ra = 10<sup>3</sup>, 10<sup>4</sup>, 10<sup>5</sup> et 10<sup>6</sup>, les résultats de nos simulations sans couplage fluide/solide sont comparés à ceux de la littérature, sur la base du maximum de la composante de vitesse  $u$  à mi-largeur et le maximum de la composante de vitesse  $v$  à mi-hauteur.

	Ref. [5]		Ref. [6]		Ref. [7]		Ref. [8]		simulation	
	$u$	$v$	$u$	$v$	$u$	$v$	$u$	$v$	$u$	$v$
$Ra=10^3$	3,63	3,68	3,68	3,73	3,65	3,70	3,64	3,69	3,66	3,69
$Ra=10^4$	16,21	19,51	16,1	19,9	16,18	19,62	15,97	19,98	16,18	19,61
$Ra=10^5$	34,81	68,22	34,0	70	34,77	68,69	33,51	70,81	34,76	68,61
$Ra=10^6$	65,33	216,75	65,4	228	64,69	220,83	65,55	227,24	64,85	220,46

Tableau 1 : Maxima des composantes de vitesse  $u$  et  $v$  (adimensionnés) sur les profils à mi-largeur ( $x = 0,5$ ) et mi-hauteur ( $y = 0,5$ )

Nos simulations montrent une indépendance des résultats numériques à partir d'un maillage de  $82 \times 82$  points, légitimant ainsi l'utilisation d'une discrétisation spatiale d'ordre élevé. Le tableau 1 montre l'adéquation de nos résultats par rapport aux résultats de différents auteurs utilisant des méthodes numériques variées ([5], [6], [7] et [8]).

#### 4.2. Convection naturelle avec couplage fluide/solide des transferts thermiques

On considère ici le couplage des transferts thermiques fluide/solide sur les parois horizontales. Cette configuration permet de s'affranchir de l'hypothèse de parois adiabatiques. Le nombre de Rayleigh retenu est  $Ra=10^5$ . Les rapports de conductivités thermiques entre le solide et le fluide étudiés sont  $1$ ,  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-4}$ . Cela revient à prendre un matériau de plus en plus isolant sur les parois horizontales. La figure 2 présente un tracé des lignes de courant, des iso-vitesses et des isothermes pour un rapport de  $1$ .

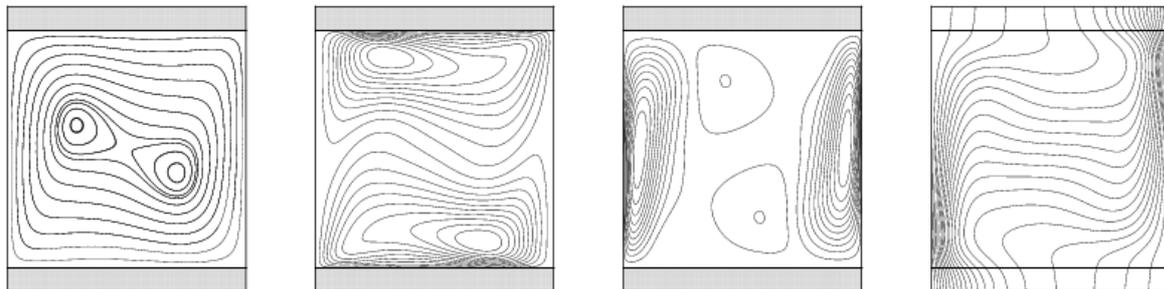


Figure 2 : Topologie de l'écoulement à  $Ra = 10^5$  et un rapport de conductivités thermiques égal à un. De gauche à droite : lignes de courant, lignes de niveau de  $u$  et  $v$ , isothermes.

La figure 2 montre que la structure globale de l'écoulement est peu affectée par les lamelles conductrices. Afin de caractériser finement les transferts thermiques pariétaux, le profil du nombre de Nusselt, ainsi que ses valeurs minimum et maximum, sont tracés en fonction du rapport des conductivités thermiques (fig. 3).

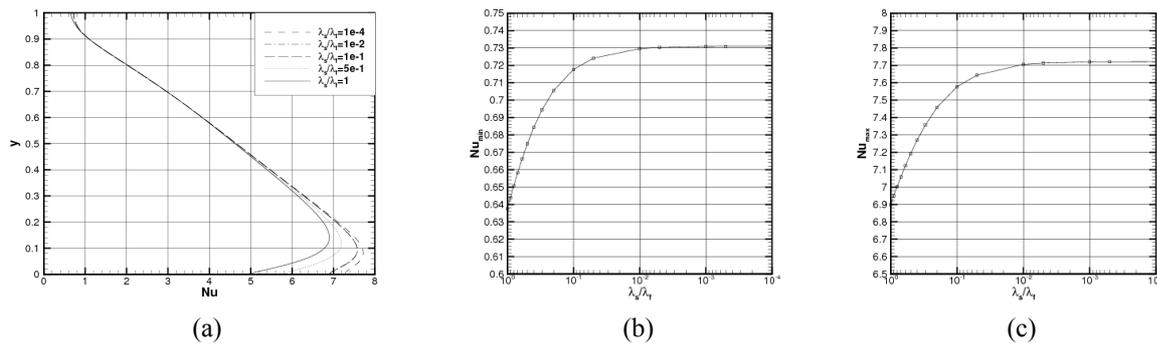


Figure 3 : Influence du rapport des conductivités thermiques sur le nombre de Nusselt  
(a) Nusselt local sur la paroi chaude, (b) et (c) Nusselt minimum et maximum sur la paroi chaude

La figure 3 montre que lorsque le rapport des conductivités thermiques diminue les transferts thermiques pariétaux tendent vers une asymptote. Cette solution limite correspond, à celle de la convection naturelle en cavité 2D avec des parois horizontales adiabatiques. En effet, les valeurs du nombre de Nusselt minimum et maximum de la paroi chaude pour le rapport le plus faible sont respectivement de 0,73 et 7,72. Ces valeurs sont proches des solutions de référence (parois adiabatiques) présentées dans [5], [6], [7] et [8].

## 5. CONCLUSION

Lors de ce travail, le couplage des transferts thermiques fluide/solide a été abordé à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine et sur la base d'un solveur Navier-Stokes d'ordre élevé. Cette méthodologie numérique a été testée sur un cas de référence : la cavité différentiellement chauffée en présence de lamelles solides conductrices. Il a ainsi été montré que l'écoulement dépend peu du rapport des conductivités thermiques (compris entre 1 et  $10^{-4}$ ) pour un nombre de Rayleigh de  $10^5$ . La suite de ces travaux concerne l'extension de cette méthode aux écoulements turbulents tridimensionnels.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. J. Kim, P. Moin, Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 59, pp308-323, 1985.
2. S. K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, pp16-42, 1992.
3. I. Raspo, A direct spectral domain decomposition method for the computation of rotating flows in a T-shape geometry, *Computers & Fluids*, Vol. 32, pp431-456, 2003.
4. S. Abide and S. Viazzo, A 2d compact fourth-order projection decomposition method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 206, pp252-276, 2005.
5. D. De Vahl Davis and I. Jones, Natural convection of air in a square cavity : A benchmark solution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp249-264, 1983.
6. M. T. Manzari An explicit finite element algorithm for convective heat transfer problems, *International Journal for Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 9, pp860-877, 1999.
7. D. A. Mayne, A. S. Usmani, and M. Crapper, h-adaptive finite element solution of high rayleigh number thermally driven cavity problem. *International Journal for Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 10, pp598-615, 2000.
8. D. C. Wan, B. S. V. Patnaik and G. W. Wei, A new benchmark quality solution for the buoyancy driven cavity by discrete singular convolution, *Numerical Heat Transfer : Part B : Fundamentals*, Vol. 40, pp199-228, 2001.