

Calcul de la production d'entropie d'un écoulement incompressible en convection forcée dans un convergent

S. HADJADJ¹, S.SAOULI², B. BOUALI³

¹ Département de Physique Energétique, Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur, Université KASDI Merbah, Ouargla
hadjajisouad@yahoo.fr

² Département de Génie des Procédés, Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur, Université KASDI Merbah Ouargla
sveralgk@yahoo.fr

³ Institut Génie Mécanique, Université TELIDJI Amar Laghouat

RESUME :

La production d'entropie est une nouvelle approche énergétique qui s'applique presque dans tous les domaines et disciplines, où apparaît le phénomène d'irréversibilité qui traduit la dégradation d'énergie. Dans le présent article, nous optimisons la conduite convergente (un cas particulier de l'écoulement de Jeffrey – Hamel qui trouve son importance dans l'aéronautique, l'aérospatial, la biologie, etc.) par le calcul de la production d'entropie, en utilisant une approche numérique itérative qui se compose de trois méthodes numériques telles que la méthode de Tir, Runge-Kutta et Adams. Le modèle se présente sous forme d'un écoulement incompressible en convection forcée dans un convergent composé de deux plaques planes inclinées et isothermes. Le régime d'écoulement, la nature du fluide et le type de convection thermique aussi que la géométrie de la conduite, conditionnent ce système et influent sur la dégradation d'énergie ou bien la production d'entropie qui doit être faible et réduite. L'analyse de ces derniers et la discussion des résultats obtenus nous permettent d'atteindre notre objectif qui se figure dans l'amélioration de fonctionnement et la maximisation du rendement de ce type de conduite.

NOMENCLATURE

a	Diffusivité thermique	[m ² /s]	T	La température	[°C]
c_i	La chaleur spécifique du fluide	[J/Kg K]	T_p	La température de la paroi	[°C]
f	La fonction de la vitesse	----	T_∞	La température à l'entrer	[°C]
k	Conductivité thermique	[W/m K]	u	La composante de la vitesse	[m/s]
\dot{m}_v	Le débit volumique	[m ³ /s]	ρ	La masse volumique	[Kg/m ³]
N_s	La forme adimensionnelle de la production d'entropie	----	μ	La viscosité dynamique	[Ns/m ²]
r	La distance radiale	[m]	ν	La viscosité cinématique	[m ² /s]
S_G	La production d'entropie	[J/K]	θ	La fonction de la température	----
S_0	La d'entropie de référence	[J/K]			

1. INTRODUCTION

Parmi les applications de la génération d'entropie on décrit les écoulements convectifs à l'intérieur des conduites, dits écoulements internes convectifs, qui se caractérisent par des conditions aux limites bien définies dépendant de la géométrie de la conduite. Plusieurs chercheurs ont essayé d'optimiser différents types de conduites, afin de faire un passage pratique à la maîtrise des systèmes plus compliqués, Shah et London[1].

Bejan[2], Oztop[3] et Abu-Nada[4] ont travaillé sur les conduites circulaires. Nurasawa [5] a analysé la conduite rectangulaire. Erbay et al. [6], Abdul Aziz [7] et Aiboud-Saouli et al.[8] ont

étudié le cas des plaques en parallèle. Sahin et Ben mansour [9] et Naphon [10] ont expérimenté le calcul de la production d'entropie des écoulements convectifs internes. L'espace cylindrique et annulaire est traité par Shohel et Fraser [11]. Haddad et al.[12] ont étudié un micro-canal. Ko et Ting ont optimisé le serpentín et la conduite courbée [13]. Sahin[14] a jumelé les géométries des conduites (triangulaire, sinusoïdale, ...).

2. FORMULATION DU PROBLEME

On traite dans ce qui suit la génération d'entropie d'un écoulement laminaire et permanent d'un fluide newtonien, visqueux et incompressible dans un convergent composé de deux plaques inclinées, imperméables à une température constante (T_p), où la chaleur se transmet en convection forcée. En utilisant les coordonnées polaires (r, φ), l'angle α limite les parois supérieure et inférieure du convergent, voir fig.1.

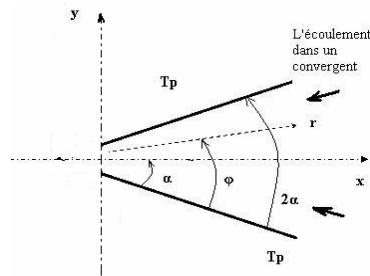


Figure1. L'écoulement dans un convergent

Supposons que l'écoulement est purement radial [17] et [18], donc : $u_\varphi = 0$ (1)

De l'équation de continuité [15], on aura:

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow u_r = \frac{f(\varphi)}{r} \quad (2)$$

Considérons aussi que la distribution de la température au niveau des parois est inversement proportionnelle au carré de la distance radiale [19], [20], [21] et [22]) : $T' = \left(\frac{1}{r^2}\right)\theta(\varphi)$ (3)

$$\text{Avec : } T' = T - T_\infty \quad (4)$$

Intégrons les expressions de vitesse (2), et de la température (3), dans les équations dynamique (Navier-Stocks) et énergétique [15], dont :

- L'équation dynamique prend -après quelques manipulations mathématiques- la forme suivante : $\nu \left(\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right) + 4\nu f + f^2 = A$ (5)

Avec : A une constante, qui se détermine en se donnant :

- La pression P en un point donné du domaine de l'écoulement.
- Le débit volumique (constant) à travers une section où $r = \text{cste}$, c'est-à-dire :

$$m_v = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u_r r d\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f d\varphi \quad (6)$$

- L'équation énergétique -en négligeant la dissipation visqueuse- s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + 4\theta = -\frac{2}{a} f\theta \quad (7)$$

$$\text{Avec : } a = \frac{k}{\rho c_i}$$

(8)

Les conditions aux limites utilisées sont :

$$\varphi = \pm\alpha : u_r = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ et } T = T_p \quad (9.a,b)$$

La production d'entropie, sous sa forme générale [16] :

$$S_G = \frac{k}{T_\infty^2} (\nabla T)^2 + \frac{\mu}{T_\infty} \phi \quad (10)$$

Où : $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$ est le gradient de la température en coordonnées polaires, et

$$\phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)^2 \text{ est la dissipation visqueuse.}$$

En utilisant l'adimensionnement des paramètres suivant :

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{|U|}, \quad \bar{f} = \frac{f}{|U|R} = \frac{f}{Rf_{centre}}, \quad \bar{T}' = \frac{T'}{T_p}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{T_p R^2}$$

Dont U est la vitesse caractéristique calculée au niveau de l'axe \vec{ox} à la distance radiale caractéristique R [21] :

$$u_r = |U| \frac{R}{r} f \left(\frac{-\alpha + \alpha}{2} \right)_{r=R} = |U| \frac{R}{r} f(0) = U \quad (11)$$

$$T_p' = T_p - T_\infty \quad (12)$$

On réécrit les équations qui gèrent ce système (5), (7) et (10) dynamique, énergétique et la production d'entropie respectivement sous la forme adimensionnelle:

- L'équation dynamique : $\frac{d^2 \bar{f}}{d\varphi^2} + 4\bar{f} + \text{Re} \bar{f}^2 = \bar{A}$ (13)

Avec : $\bar{A} = \frac{A}{\nu f_{centre}} = \frac{A}{|U|R\nu}$ (14)

- L'équation énergétique : $\frac{d^2 \bar{\theta}}{d\varphi^2} + 4\bar{\theta} = \text{Re.Pr}(-2\bar{f}\bar{\theta})$ (15)

- L'équation de la production d'entropie prend la forme suivante en la divisant par l'entropie de

référence S_0 : $S_0 = \frac{kT_p'^2}{R^2 T_\infty^2}$ (16)

$$N_s = \frac{1}{r^9} \left[4\bar{\theta}^2 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{Br}{\Omega} \frac{1}{r^4} \left[4\bar{f}^2 + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \quad (17)$$

On remarque l'apparition des nombres adimensionnels tels que :

Le nombre de Reynolds : $\text{Re} = \frac{|U|R}{\nu}$, Le nombre de Prandtl : $\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu \rho c_i}{k}$, Le groupe

adimensionnel : Br/Ω , dont : $Br = \frac{\mu U^2}{kT_p'}$ est le nombre de Brinkman et $\Omega = \frac{T_p'}{T_\infty}$ est la forme

adimensionnelle de la température de référence.

Les conditions aux limites prennent les valeurs suivantes:

$$\varphi = \pm\alpha \rightarrow \bar{f} = 0 \text{ et } \bar{\theta} = 1 \quad (18.a,b)$$

Finalement ce système se présente sous forme d'un couplage de deux équations de : la dynamique (13) et l'énergie (15) plus l'équation qui calcule la production d'entropie (17), sous les conditions aux limites (18.a,b). Pour résoudre un tel problème nous avons adopté un algorithme qui transforme les équations couplées (13) et (15) en un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, et qui ramène les conditions aux limites aux conditions initiales par la méthode de Tir, pour

trouver ensuite la solution par les itérations des méthodes des différences classiques Runge-Kutta d'ordre 4 et Adams d'ordre 5.

Pour les conditions initiales $\varphi = 0$:

D'après la démonstration et l'hypothèse de l'écoulement de Jeffrey – Hamel [21], on a :

$$\bar{f}\left(\frac{-\alpha + \alpha}{2}\right) = \bar{f}(0) = \frac{U}{|U|} = \left. \begin{array}{l} +1, (+U \text{ cas d'un div}) \\ -1, (-U \text{ cas d'un conv}) \end{array} \right\} \quad (19)$$

Ou bien d'après [18] (la procédure prise dans notre cas), on met $\bar{f}(0) = 1$

Avec : - $Re > 0 \rightarrow$ écoulement vers l'extérieur, cas d'un divergent.

- $Re < 0 \rightarrow$ écoulement vers l'intérieur, cas d'un convergent.

$$\bar{\theta}\left(\frac{-\alpha + \alpha}{2}\right) = \bar{\theta}(0) = 0 \quad (20)$$

3. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Le système est symétrique, on doit donc le traiter sur l'intervalle $[0, \pm\alpha]$.

3.1- La distribution des vitesses

Dans la figure 2, on remarque l'apparition de la couche limite. Pour $Re = 684$, la vitesse d'écoulement s'annule rapidement en s'éloignant de l'axe ox vers les parois. Tandis que pour $Re = 5000$, la courbe s'aplatit et la vitesse de l'écoulement demeure relativement constante en s'annulant lentement au voisinage de la paroi [19]. On constate aussi que l'épaisseur de la couche limite diminue, cette diminution est due à la fois à la décroissance de la section et à la modification du profil de vitesse dans la couche limite [23].

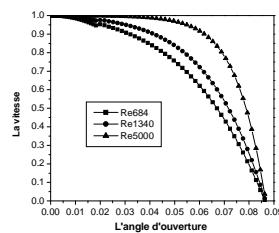


Figure 2. Profils des vitesses en fonction de l'angle d'ouverture.

3.2- La distribution de la température

l'équation énergétique (15) nous montre que la température dépend des deux nombres adimensionnels Reynolds (Re) et Prandtl (Pr). Pour $Re = 684$ on constate que la couche limite est un siège d'une variation rapide de la température du fluide jusqu'à la température de la paroi [17]. Par rapport au cas où $Re = 5000$, figure3. Concernant la nature du fluide, on a pris quatre valeurs du nombre de Prandtl (Pr) (0.1, 1, 5 et 10) afin de traiter tout type de fluides, dont on a constaté trois cas : Si $Pr \gg 1$, liquides visqueux ou peu conducteur, l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur, et le gradient à la paroi est plus faible pour la vitesse que pour la température. Contrairement pour les fluides où $Pr \ll 1$ (métaux liquides), et $Pr \approx 1$, cas des gaz, les deux mécanismes de diffusion sont d'une importance comparable et les deux couches limites ont une allure voisine [24], [25] et [26].

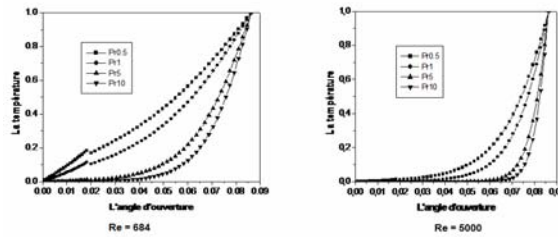


Figure3. Profils de la température en fonction de l'angle d'ouverture

3.3- La production de l'entropie:

L'équation (17), nous montre que la production d'entropie dépend du groupe adimensionnel Br/Ω et la distance radiale \bar{r} , aussi que des nombres adimensionnels de Reynolds Re et Prandtl Pr .

3.3.1- Le groupe adimensionnel Br/Ω

La production d'entropie est proportionnelle au groupe adimensionnel Br/Ω , dont elle augmente d'une façon plus rapide auprès des parois, là où la couche limite naît ou existe. Les effets de la viscosité sont dominants, et la dissipation d'énergie augmente d'un régime d'écoulement à un autre. Sa localisation se diffère, en se concentrant de plus en plus au près des parois [16], voir figure 4.

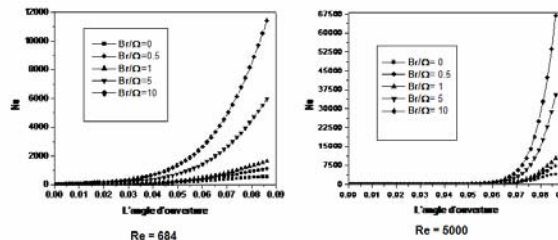


Figure4. N_s en fonction de l'angle d'ouverture, variation de Br/Ω , $Pr = 1$ et $\bar{r} = 1$.

3.3.2- La distance radiale \bar{r}

D'après la figure 5, on remarque que la production d'entropie N_s est inversement proportionnelle à la distance radiale \bar{r} , dès qu'on se rapproche de l'ouverture la dégradation d'énergie sera très importante.

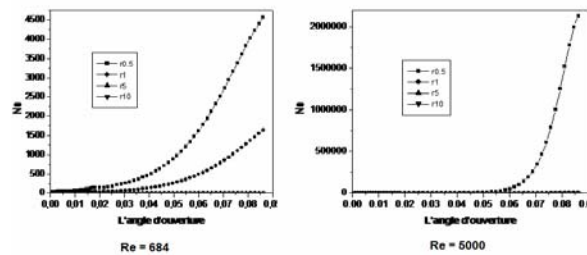


Figure 5. N_s en fonction de l'angle d'ouverture, variation de \bar{r} , $Br/\Omega = 1$ et $Pr = 1$

3.3.3- Le nombre de Prandtl Pr

Pr influe sur la production d'entropie, en collaboration avec Re . Car en régime transitoire où turbulent la nature du fluide réagit sur la dissipation d'énergie. Les gaz et les fluides parfaits ($Pr \approx 1$) seront plus adaptables pour ce système par rapport aux liquides visqueux. Figure 6.

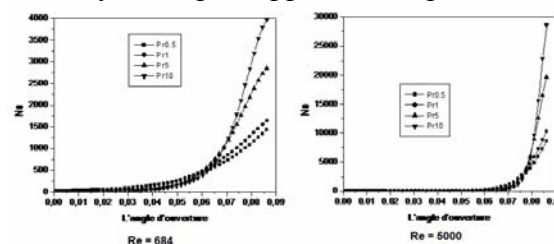


Figure6. N_s en fonction de l'angle d'ouverture, variation Pr , $Br/\Omega = 1$ et $\bar{r} = 1$

4- CONCLUSION

L'optimisation du convergent dépend comme toutes autres conduites ou systèmes, de plusieurs facteurs comme : le type de convection thermique où le groupe adimensionnel Br/Ω nous a indiqué la domination des effets de viscosité ou bien les forces de frottement qui se développent auprès des parois aux seins des gradients des vitesses par rapport aux effets de la diffusion de la chaleur. Aussi que la géométrie qui se représente par la distance radiale r qui sera rentable lorsqu'elle tend vers l'infini. La nature du fluide (le nombre de Prandtl) où la production d'entropie sera énorme quand la viscosité sera très importante en passant du régime laminaire vers la turbulence. Ce passage augmente les pertes de charge auprès des parois et dégrade l'énergie, en nous indiquant que le nombre de Reynolds est l'influe fondamental de tout se qui précède.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. R.Shah, A.London, 1978, Laminar flow forced convection in ducts. *Adv Heat Trsf*, Suppl.1 Academic Press, New York.
2. A.Bejan, 1979, A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer. *Heat Transf*, 101, pp.718-725.
3. H.Oztop, 2005, Effective parameters on second law analysis for semicircular ducts in Laminar flow and constant wall heat flux. *Int Comm Heat & Mass Trsf*, 32, pp.266-274.
4. E.Abu-Nada, 2005, Numerical prediction of entropy generation in separated flows. *Entropy*, 7, pp.234-252.
5. U.Narusawa, 2001, The second-law analysis of mixed convection in rectangular ducts. *Heat Mass Transfer*, 37, pp.197-203.
6. L.Erbay, M.Ercan, B.Sulus, M.Yalcin, 2003, Entropy Generation During Fluid Flow Between Two Parallel Plates With Moving Bottom Plate. *Entropy*, 5, pp.506-518.
7. A. Aziz, 2006, Entropy generation in pressure gradient assisted Couette flow with different thermal boundary conditions. *Entropy* 8 [2], pp.50-62.
8. S.Aiboud, S.Saouli, N.Settou, N.Meza, 2007, Second-law analysis of laminar Fluid flow in a heated channel with hydromagnetic and viscous dissipation effects. *App Energy*, 84, pp.279-289
9. A.Sahin, R.Benmansour, 2003, Entropy generation in laminar fluid flow through a circular pipe. *Entropy*, 5, pp.404-416.
10. P.Naphon, 2006, Second law analysis on the heat transfer of the horizontal concentric Tube heat exchanger. *Int Comm in Heat and Mass Transfer*, 33, pp.1029-1041.
11. S.Mahmud, R.FRAZER, 2002, Second law analysis of heat transfer and fluid flow inside a cylindrical annular space. *Exergy journal*, 2, pp.322-329.
12. O.HADDAD, M.ABUZAIID, M. AL-NIMR, 2004, Entropy Generation Due to Laminar Incompressible Forced Convection Flow through Parallel-Plates microchannel. *Entropy*, 6(5), pp.413-426.
13. T.KO, K.TING, 2005, Entropy generation and thermodynamic optimization of fully developed laminar convection in a helical coil. *Int Comm H M Trsf*, 32, pp.214-223.
14. A.SAHIN, 1998, Irreversibilities in various duct geometries with constant wall heat flux and laminar flow. *Energy*, 23, pp.465-473.
15. R.COMOLET, 1994, Mécanique Expérimentale des Fluides, T2 Dynamique Des Fluides Réels. Masson, 4^{ème} Ed, Paris.
16. M.FEIDT, 1996, Thermodynamique et Optimisation Energétique des Systèmes et Procédés. Tec Doc Lavoisier, 2^{ème} Ed, Paris.
17. L.LANDAU, E.LIFCHITZ, 1989, Physique Théorique 06. *Lib du Globe*, 2nd Ed, Moscou.
18. P.C. LU, 1977, Introduction to the Mechanic of Viscous Fluids. Hemisphere Pub Corp.
19. H. SCHLICHTING, 1968, Boundary layer theory. *MC Graw Hill*, 7^{ème} Ed, New York.
20. K.MILLSAPS, K.POHLHAUSEN, 1953, Thermal distributions in Jeffery Hamel flows between nonparallel plane walls. *Aero. Sci.*, 20, pp.187-196.
21. T.CHEN, 1973, Jeffery Hamel Flow with Free Convection. PhD Eng Mech, Univ of Nebraska, Lincoln.
22. N.RILEY, 1989, Heat transfer in Jeffery Hamel flow. *Quart J mech & appl math*, 42, pp. 203-211.
23. R.OUZIAUX, J.PERRIER, 1978, Mécanique des Fluides Appliquée. *Dunod*, 3^{ème} Ed, Bordas, Paris.
24. J.PADET, 1997, Principes des Transferts Convectifs. *Politechnica*, Paris.
25. H.BAEHR, K.STEPHAN, 1998, Heat & Mass Transfer. *Springer*, Berlin.
26. Y.CENGEL, 2003, Heat Transfer (A pratical approach). *MC Graw Hill*, 2nd Ed, New York.