

## EVALUATION DE MODELES DE CORRELATIONS PRESSION- DEFORMATION DANS LA LIMITE INCOMPRESSIBLE D'UNE TURBULENCE HOMOGENE CISAILLEE

M. Riahi\*, L. Chouchane et T. Lili

*Faculté des Sciences de Tunis, Département de Physique, Laboratoire de  
Mécanique des Fluides, Tunis-Tunisie  
Mohamed.Riahi@fst.rnu.tn*

### RESUME

Nous utilisons une technique de simulation numérique concernant la simulation dans le cadre de la théorie de distorsion rapide (RDT). Cette théorie a largement démontré sa pertinence et son utilité pour développer les modèles de turbulence et éclairer la physique des écoulements turbulents. Nous avons mis au point un code de calcul résolvant les équations linéarisées du mouvement pour des faibles valeurs du nombre de Mach de gradient. Ainsi, les résultats obtenus par ce code permettent d'évaluer certains modèles récents proposés dans la littérature concernant les corrélations pression-déformation dans la limite incompressible d'une turbulence homogène cisailée. Deux modèles incompressibles sont évalués à savoir les modèles de Launder, Reece et Rodi (LRR) [8] et Speziale, Sarkar et Gatski (SSG). De même, deux modèles compressibles sont testés à savoir les modèles de Hamba [3] et de Marzougui et al. [2]. Ces modèles sont testés dans la limite incompressible ( $M_{g0}=1$ ) et dans le domaine de la validité de la RDT.

### NOMENCLATURE

$Mg$	nombre de Mach de gradient	$Mt$	nombre de Mach turbulent
$S$	taux de cisaillement	$R_e$	nombre de Reynolds
$q^2$	énergie cinétique turbulente	$a$	célérité du son
$\varepsilon_s$	taux de dissipation solénodal	$\varepsilon$	taux de dissipation turbulente
$b_{ij}$	tenseur d'anisotropie de Reynolds	$\bar{\rho}$	masse volumique moyenne
$\bar{\nu} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}}$	viscosité cinématique	$\bar{\mu}$	viscosité dynamique

### 1. INTRODUCTION

Nous utilisons une technique de simulation numérique concernant la simulation dans le cadre de la théorie de distorsion rapide (RDT). Cette théorie a largement démontré sa pertinence et son utilité pour développer les modèles de turbulence et éclairer la physique des écoulements turbulents. Nous avons mis au point un code de calcul résolvant les équations linéarisées du mouvement pour des faibles valeurs du nombre de Mach de gradient. Ainsi, Nous utilisons les résultats obtenu par ce code afin d'analyser les performances de certains modèles de la littérature concernant les corrélations pression-déformation  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{22}$  incompressibles mises au point par Launder, Reece, Rodi (LRR) [8] et Speziale, Sarkar, Gatski (SSG) [7]. Nous rappelons que pour les écoulements turbulents incompressibles, le modèle LRR reste à nos jours le modèle le plus populaire ayant connu un succès notable car sa mise en œuvre est relativement simple par rapport aux autres modèles de la littérature. De même, des évaluations de certains modèles récents présents dans la littérature concernant les écoulements homogènes cisailés de fluides compressibles seront faites à savoir les modèles de Hamba [3] et de Marzougui et al. [2] concernant les termes de corrélations pression-déformation  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{22}$ . Ces modèles seront testés dans la limite

incompressible ( $M_{g0}=1$ ) et dans le domaine de la validité de la RDT. En effet, la méthode RDT prédit de manière satisfaisante le comportement de la turbulence en particulier pour des faibles valeurs du temps adimensionnel  $St$ ; pour des valeurs élevées de  $St$  les effets non linéaires se développent et l'approximation de la méthode RDT n'est plus efficace (Riahi et al. [1]).

## 2. FORMALISME SPECTRAL

Dans le repère local de Craya-Herring (Cambon et al. [6]), la transformation de Fourier de la fluctuation de vitesse s'écrit :

$$\hat{u}_i(\vec{k}, t) = \hat{\phi}^1(\vec{k}, t) e_i^1(\vec{k}) + \hat{\phi}^2(\vec{k}, t) e_i^2(\vec{k}) + \hat{\phi}^3(\vec{k}, t) e_i^3(\vec{k})$$

$\hat{\phi}^1(\vec{k}, t)$  et  $\hat{\phi}^2(\vec{k}, t)$  sont les modes solénoïdaux et  $\hat{\phi}^3(\vec{k}, t)$  est le mode dilatationnel,  $(\vec{e}_1(\vec{k}), \vec{e}_2(\vec{k}), \vec{e}_3(\vec{k}))$  constitue un repère orthonormé lié au vecteur d'onde  $\vec{k}$  défini comme suit :

$$\vec{e}^1(\vec{k}) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{n}}{\|\vec{k} \wedge \vec{n}\|}, \quad \vec{e}^2(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \vec{e}^1(\vec{k}) \quad \text{et} \quad \vec{e}^3(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$$

Les équations d'évolution s'expriment dans le cas d'une turbulence homogène compressible cisailée sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{\phi}}^1 + \nu k^2 \hat{\phi}^1 + S \frac{k_3}{k} \hat{\phi}^2 - S \frac{k_2 k_3}{k k'} \hat{\phi}^3 = 0, \quad (1)$$

$$\dot{\hat{\phi}}^2 + \nu k^2 \hat{\phi}^2 - S \frac{k_1 k_2}{k^2} \hat{\phi}^2 + S \frac{k_1}{k'} \hat{\phi}^3 = 0, \quad (2)$$

$$\dot{\hat{\phi}}^3 - 2S \frac{k_1 k'}{k^2} \hat{\phi}^2 + \left(\frac{4}{3} \nu k^2 + S \frac{k_1 k_2}{k^2}\right) \hat{\phi}^3 + a k \hat{\phi}^4 = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\hat{\phi}}^4 - a k \hat{\phi}^3 = 0. \quad (4)$$

Où  $S = \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \text{constante}$ ,  $k' = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$  et  $k_1, k_2$  et  $k_3$  sont les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$

suivant les trois axes du repère du Craya-Herring.

En fonction des variables adimensionnées  $\hat{t} = St, \hat{k} = \frac{k}{\kappa}, \hat{a} = 1$  et  $\hat{\phi}^i = \frac{\hat{\phi}^i}{a_0}$  (où  $\kappa$  est un nombre

d'onde), les équations (1-4) s'écrivent :

$$\frac{d\hat{\phi}^1}{d\hat{t}} + \frac{1}{R_e M_g(\kappa)} \hat{\nu} \hat{k}^2 \hat{\phi}^1 + \frac{\hat{k}_3}{\hat{k}} \hat{\phi}^2 - \frac{\hat{k}_2 \hat{k}_3}{\hat{k} \hat{k}'} \hat{\phi}^3 = 0,$$

$$\frac{d\hat{\phi}^2}{d\hat{t}} + \left(\frac{\hat{\nu} \hat{k}^2}{R_e M_g(\kappa)} - \frac{\hat{k}_1 \hat{k}_2}{\hat{k}^2}\right) \hat{\phi}^2 + \frac{\hat{k}_1}{\hat{k}'} \hat{\phi}^3 = 0,$$

$$\frac{d\hat{\phi}^3}{d\hat{t}} - 2 \frac{\hat{k}_1 \hat{k}'}{\hat{k}^2} \hat{\phi}^2 + \left(\frac{\hat{k}_1 \hat{k}_2}{\hat{k}^2} + \frac{4}{3} \frac{\hat{\nu} \hat{k}^2}{R_e M_g(\kappa)}\right) \hat{\phi}^3 + \frac{\hat{a} \hat{k}}{M_g(\kappa)} \hat{\phi}^4 = 0,$$

$$\frac{d\hat{\phi}^4}{d\hat{t}} - \frac{\hat{a} \hat{k}}{M_g(\kappa)} \hat{\phi}^3 = 0.$$

L'analyse dimensionnelle des équations linéarisées du mouvement montre le rôle essentiel joué par le nombre de Mach de gradient  $M_g(\kappa)$  introduit par Sarkar [4], qui dépend du nombre d'onde  $\kappa$  considéré. Différents régimes apparaissent en fonction de  $M_g(\kappa)$  à savoir le régime incompressible pour des faibles valeurs de  $M_g$ , le régime quasi-solénoïdal pour des valeurs modérées de  $M_g$  et le régime compressible pour des valeurs élevées de  $M_g$  (Riahi et al. [1]).

### 3. MODELES EVALUES

#### 3.1 Modèle de Launder, Reece et Rodi (LRR)

Ce modèle concernant le terme de corrélation pression-déformation est l'un des premiers modèles établis et s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & -C_1 \bar{\rho} \varepsilon_s b_{ij} + \frac{4}{5} \bar{\rho} q^2 (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + C_2 \bar{\rho} q^2 (b_{ik} \tilde{S}_{jk} + b_{jk} \tilde{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} \tilde{S}_{kl} \delta_{ij}) \\ & + C_3 \bar{\rho} q^2 (b_{ik} \tilde{\omega}_{jk} + b_{jk} \tilde{\omega}_{ik}) \end{aligned}$$

où  $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i})$  est le tenseur des taux moyens de déformations de Favre et  $\tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{j,i})$  est le tenseur des taux moyens de rotation de Favre.  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  sont des constantes ayant respectivement les valeurs 3.0, 1.75 et 1.31.

#### 3.2 Modèle de Speziale, Sarkar et Gatski (SSG)

Aussi récent que le précédent, ce modèle de corrélation pression-déformation s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & -(C_1 \bar{\rho} \varepsilon_s + C_1^* \bar{\rho} P) b_{ij} + C_2 \bar{\rho} \varepsilon_s (b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{kl} b_{kl} \delta_{ij}) \\ & + (C_3 - C_3^* II_b^{1/2}) \bar{\rho} q^2 (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + C_4 \bar{\rho} q^2 (b_{ik} \tilde{S}_{jk} + b_{jk} \tilde{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} \tilde{S}_{kl} \delta_{ij}) \\ & + C_5 \bar{\rho} q^2 (b_{ik} \tilde{\omega}_{jk} + b_{jk} \tilde{\omega}_{ik}) \end{aligned}$$

où  $C_1 = 3.4$ ,  $C_1^* = 1.80$ ,  $C_2 = 4.2$ ,  $C_3 = \frac{4}{5}$ ,  $C_3^* = 1.30$ ,  $C_4 = 1.25$ ,  $C_5 = 0.4$  et  $II_b = b_{ij} b_{ij}$ .

$P = -2Sb_1 q^2$  est le terme de production.

#### 3.3 Modèle de Hamba

Le modèle proposé par Hamba [3] se présente sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & \frac{2}{3} \Pi_d \delta_{ij} - (1 - C_{ps5} \chi_p) \bar{\rho} \left[ C_{ps1} \frac{\varepsilon}{q^2} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} q^2 \delta_{ij}) + C_{ps2} (P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij}) \right. \\ & \left. + C_{ps3} q^2 S_{ij} + C_{ps4} (d_{ij} - \frac{1}{3} d_{kk} \delta_{ij}) \right] \end{aligned}$$

\*  $\Pi_d$  est un terme de corrélation pression dilatation.

\*  $\chi_p = \frac{\bar{p}^2}{2\bar{\rho}^2 \bar{c}^2 q^2}$  est un paramètre sans dimension avec  $\bar{c}$  la célérité moyenne du son.

\*  $C_{ps1}, C_{ps2}, C_{ps3}, C_{ps4}$  et  $C_{ps5}$  sont des constantes de valeurs respectives 1; 0.6; 0.15; 0.15 et 4.

\*  $S_{ij}$  est le tenseur du taux moyen de déformation.

\*  $P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$  et  $d_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$  représentent deux termes de production.

### 3.4 Modèle corrigé de Marzougui et al.

Le modèle corrigé de Marzougui et al. [2] exprimant la corrélation pression-déformation dans le cas d'une turbulence compressible est une extension du modèle incompressible de Launder, Reece, Rodi (LRR) [8]. Ce modèle se présente sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & -C_1^I \frac{(1 - 0.44M_t)^2}{(1 + \alpha M_t^2)} \bar{\rho} \varepsilon_s b_{ij} + C_2^I \bar{\rho} q^2 \tilde{S}_{ij} \\ & + C_3^I (1 - 1.5M_t^2) \bar{\rho} q^2 \left[ b_{ik} \tilde{S}_{jk} + b_{jk} \tilde{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} \tilde{S}_{mn} \delta_{ij} \right], \\ & + C_4^I (1 - 0.5M_t) \bar{\rho} q^2 [b_{ik} \tilde{\omega}_{jk} + b_{jk} \tilde{\omega}_{ik}] \end{aligned}$$

avec  $\alpha = 0.5$ ;  $C_1^I, C_2^I, C_3^I$  et  $C_4^I$  sont les constantes du modèle incompressible de Launder, Reece, Rodi (LRR) [8] qui prennent respectivement les valeurs 3 ; 0.8 ; 1.75 et 1.31.

## 4. ECRITURE SPECTRALE DU TENSEUR DE CORRELATION PRESSION-DEFORMATION

Afin d'évaluer ces différents modèles, il est utile d'exprimer le tenseur de corrélation pression-déformation  $\Pi_{ij}$  qui sera par la suite intégré sur tout l'espace spectral. Cette corrélation s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{ij}(\vec{k}, t) = & a\Phi_{41}(\vec{k}, t)(k_j e_i^1(\vec{k}, t) + k_i e_j^1(\vec{k}, t)) + a\Phi_{42}(\vec{k}, t)(k_j e_i^2(\vec{k}, t) + k_i e_j^2(\vec{k}, t)) \\ & + a\Phi_{43}(\vec{k}, t)(k_j e_i^3(\vec{k}, t) + k_i e_j^3(\vec{k}, t)) \end{aligned}$$

$\Phi_{ij}(\vec{k}, t)$  est le tenseur spectral des corrélations doubles défini par :

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, t) \delta(\vec{k} - \vec{p}) = \langle \hat{\phi}^{i*}(\vec{p}, t) \hat{\phi}^j(\vec{k}, t) \rangle \quad i, j = 1..4$$

les symboles " $\langle \rangle$ " et " $*$ " désignent respectivement une moyenne d'ensemble et le complexe conjugué.

## 5. PARAMETRES INITIAUX

Les valeurs initiales des paramètres sans dimension décrivant la turbulence dans la limite incompressible sont résumées dans le tableau 1 :

Table 1. Valeurs initiales des paramètres décrivant la turbulence

$Mt_0 = \frac{\sqrt{q_0^2}}{a_0}$	$Mg_0 = M_{t0} S \frac{q_0^2}{\varepsilon_0}$	$r_0 = S \frac{q_0^2}{\varepsilon_0}$	$R_{eT0} = \frac{q_0^4}{\bar{v} \varepsilon_0}$
0.1	1	10	296

Le rapport du nombre de Mach de gradient par le nombre de Mach turbulent caractérise la rapidité du cisaillement  $r$ . Nous avons utilisé le même champ turbulent initial que celui utilisé par Simone [5] :  $E(K, t_0) = K^4 \exp(-2 \frac{K^2}{\kappa_{pic}^2})$ , où  $K$  est le nombre d'onde initial et  $\kappa_{pic}$  la position du pic du spectre.

## 6. RESULTATS ET DISCUSSION

L'évolution du nombre de Mach de gradient représenté sur la figure 1, traduit bien que l'on reste toujours dans la limite incompressible puisque lorsque  $St=1.2$  le nombre de Mach de gradient ne dépasse pas la valeur  $M_g=0.7$  qui reste dans la limite incompressible. Nous pouvons ainsi effectuer les comparaisons entre les modèles de Launder, Reece et Rodi (LRR) [8] et Speziale, Sarkar et Gatski (SSG) [7] établis pour des régimes incompressibles et les résultats RDT dans la limite incompressible ainsi que pour les deux modèles compressibles de Hamba [3] et de Marzougui et al. [2].

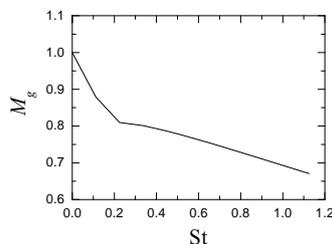


Figure 1. Evolution temporelle du nombre de Mach de gradient.

Les résultats de comparaison des termes  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{22}$  du tenseur de corrélation pression-déformation issus de la RDT et du modèle incompressible LRR (figures 2.a-c) montrent un accord satisfaisant dans la limite incompressible. Par contre, le modèle SSG montre un accord moins bon.

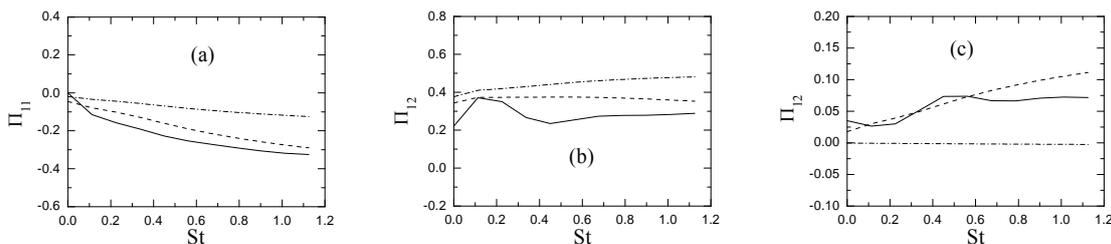


Figure 2. Evolution des composantes  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{22}$  du tenseur de corrélation pression-déformation.

——, résultat RDT; - - - - -, modèle LRR; - · - · - · -, modèle SSG

Les figures 3.a-c montrent que l'analyse des performances des modèles compressibles de Hamba [3] et de Marzougui et al. [2] donnent des résultats satisfaisants avec la RDT dans la limite incompressible.

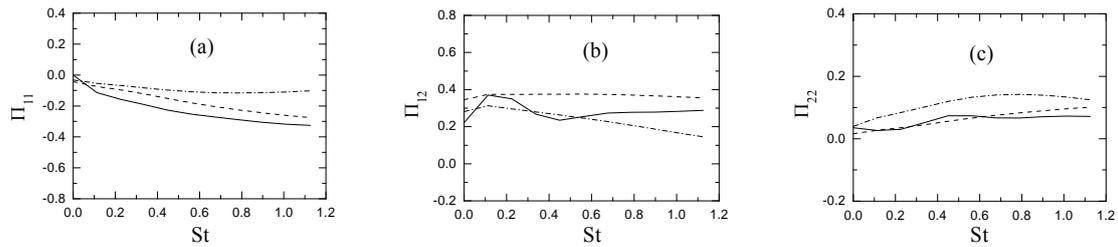


Figure 3. Evolution des composantes  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{22}$  du tenseur de corrélation pression-déformation.  
———, résultat RDT; - - - - - , modèle de Hamba; - - - - - , modèle de Marzougui et al.

## 7. CONCLUSION

Nous avons utilisé une technique de simulation numérique concernant la simulation dans le cadre de la théorie de distorsion rapide (RDT). Cette théorie a largement démontré sa pertinence et son utilité pour développer les modèles de turbulence et éclairer la physique des écoulements turbulents. Nous avons mis au point un code de calcul résolvant les équations linéarisées du mouvement. Ce code a été évalué pour le cas d'une turbulence homogène incompressible cisailée obtenu pour des faibles valeurs du nombre de Mach de gradient en comparant les résultats obtenus avec certains modèles incompressibles et compressibles de la littérature. Ces modèles concernent les termes de corrélations pression-déformation  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{22}$ . Ils ont été testés dans la limite incompressible ( $M_{g0}=1$ ) et dans le domaine de la validité de la RDT; en particulier pour des temps courts. Ainsi, les résultats de comparaisons entre la RDT et les deux modèles incompressibles de Launder, Reece et Rodi (LRR) [8] et Speziale, Sarkar et Gatski (SSG) [7] ont montré que le modèle LRR traduit mieux le régime incompressible que le modèle SSG. L'analyse des performances des modèles compressibles de Hamba [3] et de Marzougui et al. [2] ont montré des résultats satisfaisants avec la RDT.

## 8. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. M. Riahi, L. Chouchane, T. Lili, 2007, A study of compressibility effects on structure of homogeneous sheared turbulence, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, 39, 67-75.
2. H. Marzougui, H.Khlifi, T. Lili, 2005, Extension of the Launder, Reece and Rodi model on compressible homogeneous shear flow, *Eur. Phys. J.B*, 45, 147-154.
3. F. Hamba, 1999, Effect of pressure fluctuations on turbulence growth compressible homogenous shear flow. *Phys. Fluids*, A6, 1625.
4. S. Sarkar, 1995, The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, 282, 163-186.
5. A. Simone, 1995, Etude théorique et simulation numérique de la turbulence compressible en présence de cisaillement ou de variation de volume à grande échelle. Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Lyon, France.
6. C. Cambon, G.N. Coleman, N. Mansour, N.N., 1993, Rapid Distortion analysis and direct simulation of compressible homogeneous turbulence at finite Mach number, *J. Fluid Mech.*, 257, 641-665.
7. C.G. Speziale, S. Sarkar, T.B. Gatski, 1991, Modeling the Pressure-Strain correlation of Turbulence: An Invariant Dynamical Systems Approach, *J. Fluid Mech.* 227, 247-272.
8. B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi, 1975, Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, *J. Fluid Mech.*, 68, 537.