Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité axisymétrique ouverte formée par deux disques horizontaux

Auteurs : Abdessadek AIT HAJ SAID, Hassan CHEHOUANI
Faculté des Sciences et Techniques, LP2M2E, BP 549 Université Cadi ayyad, Gueliz Marrakech, Maroc
abdess_aithaj@hotmai.fr
chehouani@hotmail.fr

Résumé : ce travail résume une étude numérique, basée sur une méthode de volumes finis, de transfert de chaleur par convection libre dans une cavité axisymétrique ouverte formée par deux plaques circulaires parallèles horizontales. La plaque supérieure est maintenue à la température ambiante et celle du bas est chauffée. Les lignes de courants et les isothermes sont présentées et discutées pour différentes valeur du rapport de forme (A) et du nombre de Rayleigh (Ra). De plus, une comparaison de transfert de chaleur avec un système formée de deux plaques rectangulaires parallèles horizontales maintenues à la même température uniforme a été réalisée.

Mots clés :
Convection naturelle, cavité ouverte axisymétrique, nombre de Nusselt.

1. Introduction

Le problème du transfert de chaleur par convection naturelle dans des cavités formées par des plaques parallèles horizontales a reçu beaucoup d'attention dans les dernières années en raison de son grand intérêt dans de nombreuses applications pratiques telles que les réacteurs CVD, le refroidissement des composants électroniques, les échangeurs de chaleur, les collecteurs de l'énergie solaire et les réacteurs nucléaires etc… Jusqu'à ce jour, la majorité des travaux réalisés concernent les cavités rectangulaires [1-4]. Par contre, ils sont rares les travaux de recherches qui se sont intéressés aux cavités axisymétriques. A notre connaissance On note que [5,6] ou les auteurs ont traité le cas concret de la cavité axisymétrique. Ces travaux reste insuffisants vue l'importance du sujet. Dans d'autres travaux, on constate la présence de la cavité axisymétrique [7,8] mais dans des configurations qui présentent assez de complications qui voilent les caractéristiques propres à l'écoulement et au transfert de chaleur par convection libre dans les cavités axisymétriques.

Dans ce travail, nous avons effectué une étude numérique sur le transfert convectif dans une cavité axisymétrique différentiellement chauffée dans son état le plus simple. Il s'agit d'un espace ouvert formé par deux plaques circulaires parallèles et horizontales suspendues dans un milieu illimité. Notre objectif est d'analyser l'écoulement et le transfert de chaleur et de faire des comparaisons avec le cas de la cavité formée des plaques parallèles rectangulaires.

2. définition de problème et modèle mathématique

Le système analysé est composé de deux plaques circulaires parallèles horizontales, avec la plaque supérieure maintenue à T_0, et la plaque inférieure est chauffée à une température constante T_H. Comme le montre la figure 1, H est la distance entre les deux plaques de même rayon R. L'écoulement entre les deux plaques est considéré comme laminaire, incompressible et axisymétrique 2D. En état stationnaire, les équations régissant le problème en adoptant l'approximation de Boussinesq avec des propriétés thermodynamiques constantes, sont écrites sous forme adimensionnelle comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)=-\omega \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\omega\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\omega\right)=Pr\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega)\right]+\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right\}-PrRa\frac{\partial \Theta}{\partial r} \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \Theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \Theta}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \qquad (3)$$

Avec

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\ ; V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\ ;\ \omega = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \tag{4}$$

$$Ra = \frac{g\rho\beta H^3 \Delta T}{\mu\alpha}\ ; Pr = \frac{\mu}{\rho\alpha}\ ; A = \frac{H}{2R}\ ; \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}\ ; \Delta T = T_H - T_0 \tag{5}$$

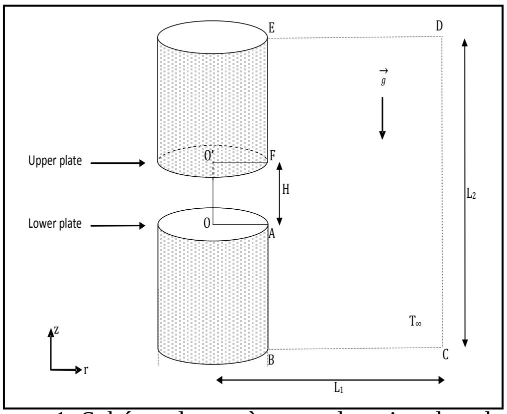


Figure. 1. Schéma du système et domaine de solution.

Le nombre de Nusselt locale est défini comme suit :

$$Nu = \frac{hH}{\lambda} \tag{6}$$

h est le coefficient d'échange local déterminé par la relation suivante :

$$h = \frac{\partial \theta}{\partial n} \tag{7}$$

Où *n* représente la normale à la surface sur laquelle le flux de chaleur est calculé. Les nombre de Nusselt moyens sur les surfaces des plaques inférieure $\overline{Nu}(low)$ et supérieure $\overline{Nu}(up)$ sont calculés par la relation suivante :

$$\overline{Nu}(low\ or\ up) = \frac{H}{R}\int_0^{\frac{R}{H}} Nu dr \tag{8}$$

3. domaine de calcul

Dans cette étude, nous avons préféré l'utilisation du domaine étendu car les conditions aux limites au niveau de l'ouverture de la cavité ne sont pas connues. Toutefois, ce choix fait apparaître d'autres difficultés qui sont, la position des frontières étendues et les conditions aux limites appropriées pour tenir compte de la réalité physique. L'approche communément adoptée consiste à effectuer des tests numériques pour en déduire la taille minimale au-dessus de laquelle l'extension du domaine a peu d'influence sur la solution. Par contre, le choix des conditions aux limites étendues demeure un problème controversé. Dans cette étude, nous avons supposé que la cavité est placée dans une grande chambre avec un haut ouvert et des parois solides (voir Fig.1). Cette hypothèse conduit à une formulation mathématique simple des conditions aux limites et une implémentation numérique facile.

4. conditions aux limites et résolution numérique

L'hypothèse d'axisymétrie permet de restreindre le domaine de calcul de la moitié ce qui réduit la mémoire et le temps de calcul. Le tableau 1 résume les conditions aux limites utilisées dans cette étude.

Les équations en termes (ψ,ω,Θ) dans le modèle mathématique sont réécrites sous la forme générale décrit par Gosman [9]. Cette formulation a l'avantage de l'utilisation d'un seul algorithme numérique pour résoudre toutes les équations. Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre de cellules non-uniformes. Le maillage est très fin là où on suppose avoir de forts gradients de température. Les équations sont résolues en utilisant une méthode de volume fini décrite en [9,10]. L'équation générale est intégrée sur l'élément de surface entourant chaque point du maillage. L'ensemble des équations algébriques résultantes est résolus itérativement en utilisant la méthode de Gauss-Seidel.

La solution est atteinte lorsque le critère de convergence $\frac{\phi^{l+1}-\phi^{l}}{\phi^{l}} \leq 10^{-5}$ pour la température, la fonction de courant et la vorticité est satisfait.
Ou l désigne le nombre des itérations et ϕ est l'une des trois variables calculées.

Tableau 1.conditions aux limites.

	Variable		
frontière	ψ	ω	Θ
O'F et OA	$\psi = 0$	$\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\begin{cases}\Theta = \Theta_{up} = 0 \; pour\, O'F \\ \Theta = \Theta_{low} = 1 \; pour OA\end{cases}$
AB et EF	$\psi = 0$	$\omega = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$	$\frac{\partial\Theta}{\partial r} = 0$
OO'	$\psi = 0$	$\omega = 0$	$\frac{\partial\Theta}{\partial r} = 0$
ED	$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0$
BC et CD	$\psi = 0$	$\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \; pour\, BC$ $\omega = -\frac{1}{L_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \; pour\, CD$	$\Theta = 0$

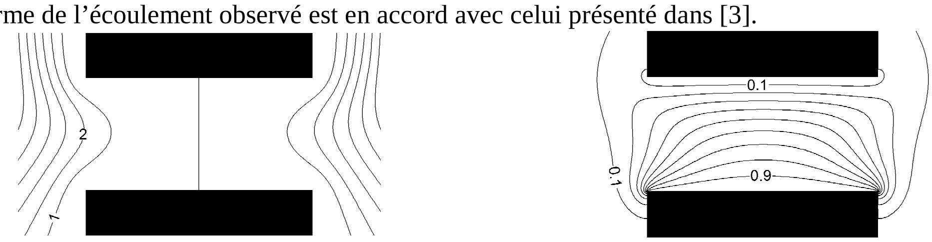
Il a été soigneusement vérifié que la taille (5x7) est suffisante pour modéliser l'écoulement et le transfert thermique pour tous les paramètres prises en compte de Ra et A.
Un maillage non-uniforme a été utilisé, le maillage est très fine dans les zones ou le gradient de température est supposé être élevé.

5. Résultats et discussions

Dans ce qui suit, l'influence des paramètres gouvernants tels que le nombre de Rayleigh et le rapport de forme sur les lignes de courant et les isothermes est minutieusement examiné pour des valeurs de Ra et de A varient entre 10^2 et $5x10^6$ et 0,1 et 1 respectivement. Le fluide considéré est l'air avec Pr = 0,71.

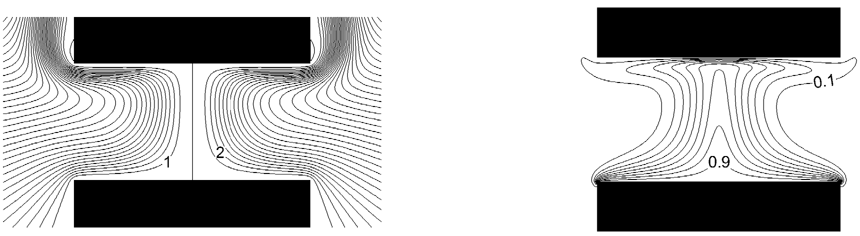
5.1 Lignes de courants et isothermes

Les figures 2-5 montrent les lignes de courant et les isothermes pour différentes valeurs de Ra et de A.
L'air à la température ambiante, pénètre obliquement la cavité, provenant des parties inférieures des ouvertures formant un angle non nul avec l'horizontale. Le fluide froid pénètre jusqu'à une certaine profondeur à l'intérieur de la cavité en coulant le long de la plaque inférieure. Lorsqu'il est suffisamment chauffé, il monte vers la plaque supérieure sous l'action de la poussée d'Archimède. L'air chaud atteint la paroi froide supérieure où elle change de direction vers l'ouverture d'où il sort par la partie supérieure de l'ouverture de la cavité. En d'autres termes, il existe une formation d'un panache thermique sortant du centre de la plaque inférieure en direction du haut. La forme de l'écoulement observé est en accord avec celui présenté dans [3].



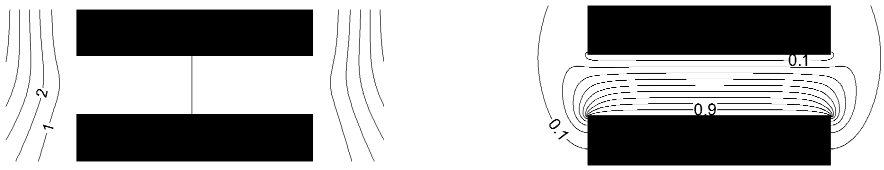
(a) (b)

Fig 2. Lignes de courants et isothermes pour A=0.5 a Ra=10^3 $(\psi_{min} = 0$ et $\psi_{max} = 1.91)$.



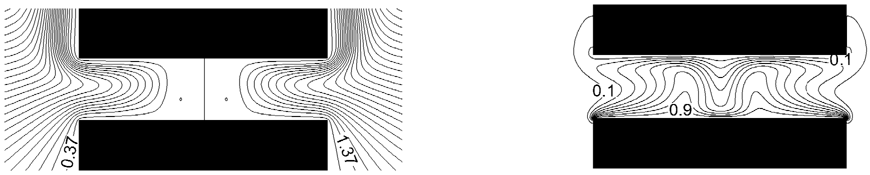
(a) (b)

Fig 3. Lignes de courants et isothermes pour *A*=0.5 a Ra=10^5 ($\psi_{min} = 0$ et $\psi_{max} = 17.4$).



(a) (b)

Fig 4. Lignes de courants et isothermes pour *A*=0.25 a Ra=10^3 ($\psi_{min} = 0$ et $\psi_{max} = 0.3$).



(a) (b)

Fig. 5. Lignes de courants et isothermes pour *A*=0.25 a Ra=10^5 ($\psi_{min} = -0.63$ et $\psi_{max} = 9.65$).

Comme le montre la figure. 2a quand Ra = 10^3, l'écoulement du fluide est très faible. Peu de fluide froid entre dans la cavité, les forces visqueuses sont dominantes. Dans la partie inférieure de la cavité, les isothermes ont une distribution quasi horizontale. En d'autres termes, le milieu est stratifié et le transfert de chaleur est essentiellement régi par le mode de conduction.

Lorsque nombre de Rayleigh augmente de 10^3 à 10^5 (figures 2 et 3), le fluide froid pénètre plus profondément la cavité avec un débit plus élevé. Les lignes de courant entrant et sortant sont plus étroites, ce qui indique une accélération du fluide au niveau des ouvertures de la cavité. Par conséquence, les isothermes deviennent courbées et la stratification du milieu est détruite. Des gradients élevés de température sont localisés au niveau du bord de la plaque inférieure et au centre de la plaque supérieure.

Lorsque le rapport de forme diminue à 0,25 (fig. 4 et 5), le fluide est de plus au repos entre les plaques (figure 4) et la quantité du fluide froid rentrant diminue, les forces de viscosité sont plus dominantes. De ce fait, la stratification du fluide à l'intérieur de la cavité est favorisée et les isothermes sont distribuées horizontalement, avec un peu de déformation au niveau des bords. Le transfert de chaleur à l'intérieur de la cavité est essentiellement conductif. En outre, une zone de fluide en rotation apparaît pour certaines valeurs de Ra (Fig. 5). En conséquence, le panache thermique est bifurqué en deux plumes distinctes donnant une inversion du sens de transfert de la chaleur au centre de la cavité. Un gradient de température au niveau des bords et au centre de la plaque inférieure est observé.

5.2 Comparaisons

Afin de vérifier la validité de notre modèle numérique, nous présentons une comparaison en termes de nombre de Nusselt moyen avec les résultats présentés dans [3, 4]. La comparaison est effectuée avec une cavité à extrémité ouverte formée par deux plaques rectangulaires horizontales parallèles chauffées uniformément Θ_{up} = Θ_{low} =1 Les équations qui régissent l'écoulement couplé avec le transfert de chaleur sont réécrites en coordonnées cartésiennes et le même schéma numérique est utilisé pour la résolution. Les résultats présentés dans le tableau 3 montrent un bon accord avec les résultats obtenus dans [3, 4] avec une légère différence qui ne dépasse pas 4,8% dans le pire des cas.

Une comparaison entre le cas de plaques circulaires et les plaques rectangulaires est très intéressant pour mettre en évidence l'effet de la géométrie sur le transfert convectif. Le tableau 3 résume les résultats de cette comparaison.

On déduit que $\overline{Nu}(up)$ pour le cas des plaques circulaires sont toujours plus élevés que dans le cas des plaques rectangulaires pour tous Ra et A considérer. En effet, si la surface supérieure est considérée comme une face orienté en bas, nos résultats sont qualitativement en accord avec les corrélations données dans des travaux antérieurs [11] où nous avons remarqué clairement que le nombre de Nusselt pour une plaque circulaire est généralement supérieur au nombre de Nusselt pour les rectangulaire ou carrée.

En ce qui concerne le transfert de chaleur des surfaces orientées vers le haut, Al-Arabi et El-Riedy [12] a constaté que le transfert de chaleur moyen d'une plaque circulaire était pratiquement le même que celui d'une plaque carrée. Toutefois, pour la cavité formée par des plaques rectangulaires $\overline{Nu}(low)$ est toujours supérieure à celui des plaques circulaires sauf pour A = 0,5 à Ra = 10^3, où le mode de convection par conduction est dominant. En effet, les plaques circulaires en haut échange beaucoup plus de chaleur avec l'air en dessous ce qui rend l'air au-dessus de la plaque circulaire en bas de plus en plus chaud. Ce qui diminue l'échange de chaleur de la plaque circulaire inférieure.

Tableau 3. Comparaisons du nombre de Nusselt avec [3, 4] et entre les plaques circulaires et rectangulaires.

A	Ra	$\overline{Nu}$	Résultats antérieurs		Plaques rectangulaires	Différences en Pourcentage	plaques circulaires
0.5	10^3	$\overline{Nu}(low)$	0.826	[3]	0.808	2.2	0.890
		$\overline{Nu}(up)$	0.437	[3]	0.433	0.9	0.678
	10^4	$\overline{Nu}(low)$	1.842	[3]	1.874	1.7	1.535
		$\overline{Nu}(up)$	1.169	[3]	1.190	1.8	1.620
	10^5	$\overline{Nu}(low)$	2.976	[3]	3.081	3.7	2.502
		$\overline{Nu}(up)$	3.221	[3]	3.065	4.8	3.548
1	10^3	$\overline{Nu}(low)$	2.13	[4]	2.219	4.2	2.086
		$\overline{Nu}(up)$	1.64	[4]	1.715	4.6	2.664
	10^4	$\overline{Nu}(low)$	4.20	[4]	4.202	0.0	3.141
		$\overline{Nu}(up)$	4.04	[4]	4.129	2.2	5.405

5. conclusion

les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur entre deux plaques circulaires pour des nombres de Rayleigh variant de 10^2 à $5x10^6$ et du rapport de forme allant de 0,1 à 1, ont été soigneusement étudiés dans ce travail. Une technique numérique de volumes finis a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes.

Les lignes de courants et les isothermes dépendent du nombre de Rayleigh et du rapport de forme. Le fluide froid pénètre plus profondément à l'intérieur de la cavité ouverte pour les nombres de Rayleigh et rapport de forme élevés. Un écoulement secondaire en rouleaux peut être observé pour des faibles rapports de forme.

Enfin, des comparaisons avec les plaques rectangulaires ont été effectuées afin de vérifier la validité du schéma numérique présenté et d'examiner l'effet de la géométrie sur le transfert de chaleur. Les résultats obtenus sont en bon accord avec des travaux antérieurs. Le nombre de Nusselt à la surface supérieure dans le cas des plaques circulaires est toujours plus élevé que dans le cas des plaques rectangulaires. Par contre, le nombre de Nusselt à la surface inférieure dans le cas des plaques rectangulaires est toujours supérieur à celle des plaques circulaires sauf pour A = 0,5 à Ra = 10^3.

Nomenclature

A	Rapport de forme,
G	accélération due à la gravité, $m.s^{-2}$
H	distance entre plaques, *m*
h	coefficient d'échange, $w.m^{-2}.K^{-1}$
l	Nombre des itérations
L_1	Longueur du domaine, adimensionnelle
L_2	hauteur du domaine, adimensionnelle
M_1 to M_5	Taille du maillage
n	La normale a la surface
Nu	Nombre de Nusselt locale.
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen.
Pr	nombre de Prandtl.
r, z	coordonnées cylindrique, adimensionnelle
R	Rayon des plaques, *m*
Ra	Nombre de Rayleigh.
T_0	Temperature ambiante.
T_H	température de la plaque chauffée.
V_r, V_z	Composantes de vitesse, adimensionnelle

Greek symbols	
α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
β	volume expansion coefficient, K^{-1}
θ	Température, adimensionnelle.
μ	viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
ρ	densité, $kg.m^{-3}$
λ	conductivité thermique, $w.m^{-1}.K^{-1}$
ψ	fonction de courant, adimensionnelle.
ω	Vorticité, adimensionnelles.
Subscripts	
Low	valeur sur la plaque inférieure
Max	valeur maximale
Min	valeur minimale
Up	valeur sur la plaque supérieure

Références

[1] A. Bejan , S. Kimura, Penetration of Free Convection into a Lateral Cavity, Journal of Fluid Mechanics 103 (1981) 465–478.

[2] O. LeQuere, J.A.C. Humphery, F.S. Sherman, Numerical calculation of thermally driven two-dimensional unsteady laminar flow in cavities of rectangular cross section, Numerical Heat Transfer Part A 4 (1981) 249–283.
[3] K. Vafai, J. Eiteffagh, The effects of sharp corners on buoyancy-driven flows with particular emphasis on outer boundaries, International Journal of Heat and Mass Transfer 33 (1990) 2311-2328.
[4] K. Khanafer, K. Vafai, Effective boundary conditions for buoyancy-driven flows and heat transfer in fully open-ended two-dimensional enclosures, International Journal of Heat and Mass Transfer 45 (2002) 2527–2538.
[5] H. Tokanai, M. Kuriyama, E. Harada, H. Konno, Natural convection heat transfer in the open space between two horizontal circular planes with different temperatures, Heat Transfer-Asian Research, 30, Issue 6, 521–531, 2001
[6] H. TOKANAI, M. Shishido, M. Kuriyama, H. Konno, Numerical simulation of natural convection heat transfer in the open space between two horizontal circular planes, Heat transfer- Asian research , 30, Issue 6, 485-502, 2001.
[7] H. Van Santen, C.R. Kleijn, H.E.A. Van Den Akker, Mixed convection in radial flow between horizontal plates -I. Numerical simulations, Int. J. of Heat and Mass Transfer 43 (2000) 1523-1535.
[8] A. Horibe, R. Shimoyama, N. Haruki , A. Sanada, Experimental study of flow and heat transfer characteristics of natural convection in an enclosure with horizontal parallel heated plates, International Journal of Heat and Mass Transfer 55 (2012) 7072–7078.
[9] A.D. Gosman, W.M. Pun, A.K. Runchal, D.B. Spalding, M. Wolfshtein, Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, Academic Press, London, 1973.
[10] H. Chehouani, Etude théorique et expérimentale des phénomènes de transport dans les réacteurs CVD, PHD Thesis, University Caddi Ayyad, Marrakech, Morocco, N° 225,1999.
[11] E. Radziemska, W.M. Lewandowski, Heat transfer by natural convection from an isothermal downward-facing round plate in unlimited space, Applied Energy 68 (2001) 347-366.
[12] M. Al-Arabi, M. K. El-Riedy. Natural convection heat transfer from isothermal horizontal plates of different shapes, International Journal of Heat and Mass Transfer 19 (1976) 1399-1404.