

ETUDE NUMÉRIQUE DE L'EFFET DE LA POROSITÉ NORMALISÉE SUR LES COMPORTEMENTS DES SOLUTIONS EN RÉGIME INSTATIONNAIRE DANS UNE CAVITÉ POREUSE CARRÉE CHAUFFÉE ET SALÉE PAR LE BAS

A. Khadiri⁽¹⁾, M. Hasnaoui*⁽¹⁾, A. Amahmid⁽¹⁾

⁽¹⁾ *Faculté des Sciences Semlalia, Département de Physique, UFR TMF,
LMFE, Unité affiliée au CNRST (URAC 27)
BP 2390, Marrakech, Maroc*

*Fax: + (212) 24 43 74 10 Email: hasnaoui@uca.ma

Résumé: Dans la présente étude, on s'intéresse à un problème de la double diffusion combiné avec l'effet Soret dans une cavité poreuse carrée dont les faces horizontales sont soumises à des températures et à des concentrations constantes mais différentes. Les faces verticales sont adiabatiques et imperméables. On s'intéresse particulièrement, aux régimes dynamiques oscillants conditionnés par les variations de la porosité normalisée ε en limitant l'analyse à deux valeurs de ce paramètre caractérisant respectivement un milieu dense ($\varepsilon = 0.2$) et un autre clairsemé ($\varepsilon = 0.8$). Les résultats obtenus montrent que la diminution de la porosité normalisée de $\varepsilon = 0.8$ à $\varepsilon = 0.2$ agit de façon significative sur le gap et la nature des transitions subies par les différentes solutions. La porosité normalisée affecte également et de manière considérable, la nature des oscillations engendrées par les variations de ce paramètre.

Mots Clés : étude numérique/ milieu poreux/ mélange binaire/ effet Soret/ transfert de chaleur et de masse.

1. INTRODUCTION

La convection naturelle d'origine thermosolutale est un phénomène où les mouvements convectifs sont générés par des gradients de température et de concentration. Il existe également d'autres situations où un mélange binaire, dont la concentration initiale est uniforme, peut être le siège de transfert de masse en son sein une fois soumis à un gradient permanent de température, même si les parois de la configuration confinant le mélange sont imperméables au transfert de la matière. Les gradients de concentration générés dans ce cas sont dus aux gradients de température imposés au système et le phénomène est connu sous le nom de thermodiffusion ou effet Soret. Le regain d'intérêt derrière l'étude de la diffusion thermique et solutale dans les milieux fluides et poreux est motivé par les nombreuses applications dans les domaines de l'ingénierie comme l'hydrologie, la croissance des cristaux, les mécanismes de ségrégation d'hydrocarbures au sein des aquifères, le stockage des déchets nucléaires et plusieurs autres applications. De nombreuses études antérieures ont abordé le phénomène de la convection thermosolutale en présence de l'effet Soret dans les milieux fluides et poreux. L'approche expérimentale du phénomène est un vrai challenge pour les chercheurs [1-2], c'est pourquoi la plupart des études disponibles abordent le phénomène d'un aspect plutôt théorique où la stabilité des écoulements, les phénomènes d'hystérésis et l'effet de la thermodiffusion sur les prédictions du démarrage des mouvements convectifs occupent une place de choix dans ces investigations. Dans la présente étude, on vise plutôt l'étude des instationnarités relatives aux solutions multiples obtenues dans la cavité carrée considérée, pour deux valeurs typiques de la porosité normalisée, ε ($\varepsilon = 0.2$ et 0.8). En effet, la configuration considérée qui est de type Rayleigh-Bénard, a permis de mettre en évidence l'existence d'une multiplicité de solutions [3]. Dans cette étude, on analysera le comportement instationnaire de chaque solution en considérant des valeurs de N situées à l'extérieur des gammes correspondant au régime stationnaire. Ainsi, pour N , M et ε donnés, l'état de l'écoulement peut être stationnaire, oscillant périodique ou chaotique suivant la structure convective présente. C'est la raison pour laquelle on a pris soin d'étudier le comportement oscillatoire d'une structure convective donnée, en démarrant les calculs numériques à partir d'une solution stationnaire de même type, obtenue pour une valeur de N voisine de N_{CR} (N_{CR} étant la valeur critique marquant la naissance des instationnarités). L'étude numérique porte essentiellement sur l'effet de la porosité normalisée, ε , sur la nature des régimes oscillants et les valeurs critiques de N pour lesquelles ces régimes oscillants ont été observés. On examinera les évolutions temporelles de Ψ_{ext} , Nu et Sh et les lignes de courant correspondant à quelques solutions périodiques particulières pour mettre en évidence les transformations que peut subir une structure convective donnée au cours d'un cycle d'écoulement.

2. Modèle mathématique et méthode de résolution

La configuration étudiée est une matrice poreuse carrée, saturée par un fluide binaire (Fig. 1), chauffée et salée par le bas à l'aide d'une température et d'une concentration constantes. Les parois verticales sont adiabatiques et imperméables au transfert de masse. Le milieu poreux est supposé homogène et isotrope. En considérant que l'écoulement est laminaire, bidimensionnel et obéissant à l'approximation de Boussinesq et au modèle de Darcy, les équations adimensionnelles régissant en l'absence de l'effet Soret sont:

$$\nabla^2 \Psi = -R_T \left[\frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right] \quad (1)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{Le} (\nabla^2 S + M \nabla^2 T) = \varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(uS)}{\partial x} + \frac{\partial(vS)}{\partial y} \quad (3)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

Où Ψ , T et S désignent respectivement, la fonction de courant, la température et la concentration.

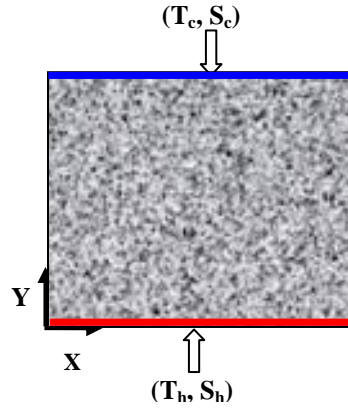


Figure 1 : Configuration étudiée

Les groupements adimensionnels apparaissant dans ces équations sont le nombre de Rayleigh thermique, R_T , le nombre de Lewis, Le , le rapport des forces convectives solutales et thermiques, N , le paramètre de Soret, M et la porosité normalisée qui sont respectivement définis comme suit :

$$R_T = \frac{g \beta_T K \Delta T' L}{\alpha \nu}, \quad Le = \frac{\alpha}{D}, \quad N = \frac{\beta_S \Delta S'}{\beta_T \Delta T'}, \quad M = D' S'_1 \Delta T' / D \Delta S' \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\sigma}$$

Les conditions hydrodynamiques exprimant l'imperméabilité des parois de la cavité, sont caractérisées par $\Psi = 0$ sur les frontières de la cavité.

Les conditions aux limites thermiques et massiques imposées au système sont données par :

$$\text{Pour } y = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 : \quad T = 1 \text{ et } S = 1 \quad (5.1)$$

$$\text{Pour } y = 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 : \quad T = 0 \text{ et } S = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{Pour } x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x} + M \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{Pour } x = 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x} + M \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

Les nombres de Nusselt, Nu , et de Sherwood, Sh , caractérisant respectivement les quantités globales de chaleur et de masse évacuées à travers la paroi horizontale supérieure, sont donnés par les expressions suivantes :

$$Nu = \int_0^1 \frac{\partial T(x,1,t)}{\partial y} dx \quad \text{et} \quad Sh = \int_0^1 \left[\frac{\partial S(x,1,t)}{\partial y} + M \frac{\partial T(x,1,t)}{\partial y} \right] dx \quad (6)$$

La discrétisation des Eqs.(1)-(3) est réalisée à l'aide d'une méthode aux différences finies. L'intégration des équations (2) et (3) est effectuée à l'aide d'une méthode implicite aux directions alternées (ADI). La

résolution de l'équation de Poisson, Eq. (1), est assurée par la méthode de sur-relaxation par point (PSOR). Les détails concernant la validation du code numérique sont donnés dans la référence par Bourich et al. [4].

3. Résultats et discussion

Une multiplicité des solutions a été obtenue dans cette configuration. Plus précisément, des écoulements de type monocellulaire (**EM**), bicellulaire (**EB**) et tricellulaire (**ET**) ont été obtenus. Ces différents types d'écoulements ont été largement discutés dans un papier par Khadiri et al. [3].

L'effet de la porosité normalisée sur les gammes de N correspondant à l'existence de chaque type de solution et les transitions correspondantes sont illustrés sur les tableaux 1 et 2 pour $R_T = 200$, $Le = 10$, différentes valeurs du paramètre de Soret, M , et deux valeurs de la porosité normalisée ($\varepsilon = 0.2$ et 0.8).

Tableau 1: Transitions subies par les différents types de solutions et les valeurs critiques, N_{CR} correspondantes pour $R_T = 200$, $Le = 10$, $\varepsilon = 0.8$ et différentes valeurs de M .

M	EM		EB		ET	
	Transition vers	Valeur critique de transition, N_{CR}	Transition vers	Valeur critique de transition, N_{CR}	Transition vers	Valeur critique de transition, N_{CR}
0	RO	-0.35	RD	-0.65	EB	-0.18
	RO	0.4	RO	0.95	RO	1.55
5	RD	-0.65	RO	-0.6	EB	-0.18
	RO	0.7	RO	2.3	RO	4.45
-5	RO	-0.2	RO	-0.55	EB	-0.18
	RO	0.3	RO	0.55	RO	0.75

Tableau 2: Transitions subies par les différents types de solutions et les valeurs critiques, N_{CR} correspondantes pour $R_T = 200$, $Le = 10$, $\varepsilon = 0.2$ et différentes valeurs de M .

M	EM		EB		ET	
	Transition vers	Valeur critique de transition, N_{CR}	Transition vers	Valeur critique de transition, N_{CR}	Transition vers	Valeur critique de transition, N_{CR}
0	RD	-0.5	RD	-0.65	EB	-0.22
	RO	0.65	RO	1.2	RO	1.8
5	RD	-0.65	RD	-0.6	EB	-0.22
	RO	0.9	RO	2.6	RO	4.8
-5	RO	-0.3	RD	-0.55	EB	-0.22
	RO	0.45	RO	0.8	RO	0.9

Une comparaison des résultats présentés dans les deux tableaux montre un élargissement des gammes de N pour lesquelles un type d'écoulement se maintient en régime stationnaire lorsque la porosité normalisée passe de 0.8 à 0.2 , et ce pour les différentes valeurs de M . Plus précisément, pour $\varepsilon = 0.8$, l'**ET** transite vers l'**EB** pour $N_{CR} = -0.18$ alors que pour $\varepsilon = 0.2$, cette transition est légèrement retardée ($N_{CR} = -0.22$). La transition vers l'écoulement oscillatoire, observée pour $N > 0$ et $\varepsilon = 0.8$, est également retardée dans le cas de $\varepsilon = 0.2$. De plus, pour $\varepsilon = 0.8$, la transition des écoulements bicellulaire et monocellulaire accompagnant la diminution de N au dessous de 0 a lieu directement vers le régime diffusif ou via une zone de transition oscillante et ce, selon le type de solution et la valeur du paramètre de Soret, M . Pour $\varepsilon = 0.2$, la nature de ces transitions est considérablement modifiée. En effet, pour $\varepsilon = 0.8$, l'**EB** transite directement vers le régime diffusif pour $N = -0.65$, alors que l'**EM** transite vers le régime diffusif à travers un régime instationnaire pour $M = 0$. Cette tendance est inversée pour $M = 5$ (i.e. c'est l'**EM** qui transite directement vers le régime diffusif alors que la transition de l'**EB** vers le régime diffusif a lieu via un régime oscillatoire). Pour $\varepsilon = 0.2$, les deux solutions (**EB** et **EM**) transitent directement vers le régime diffusif pour $M = 0$ et 5 et les gammes de N où ces solutions sont oscillatoires sont détruites (par comparaison avec $\varepsilon = 0.8$). Pour $M = -5$, les deux solutions transitent vers le régime diffusif via un régime oscillatoire pour $\varepsilon = 0.8$, alors que pour $\varepsilon = 0.2$, l'**EB** transite directement vers le régime diffusif à partir du régime stationnaire avec $N = -0.55$ comme valeur de transition. Quant à l'**EM**, il devient instationnaire dans

la gamme $-0.4 \leq N \leq -0.3$ et transite vers le régime diffusif à partir de $N = -0.45$. En plus de l'effet de la porosité sur les gammes d'existence et les types de transitions observées, la porosité ε a également un effet considérable sur la nature des oscillations. En effet, pour $M = -5$ et $\varepsilon = 0.8$, les signaux temporels de Ψ_{ext} , Nu et Sh montrent des oscillations pseudo-périodiques pour $N = -0.35$ et chaotiques pour $N = -0.4$ (résultats non présentés), alors que pour $M = -5$ et $\varepsilon = 0.2$, on obtient un comportement périodique pour ces deux valeurs de N . Afin d'illustrer ce comportement périodique, on présente sur les figures 2 les évolutions temporelles de Ψ_{min} , Ψ_{max} , Nu et Sh pour $\varepsilon = 0.2$, $M = -5$ et différentes valeurs de N .

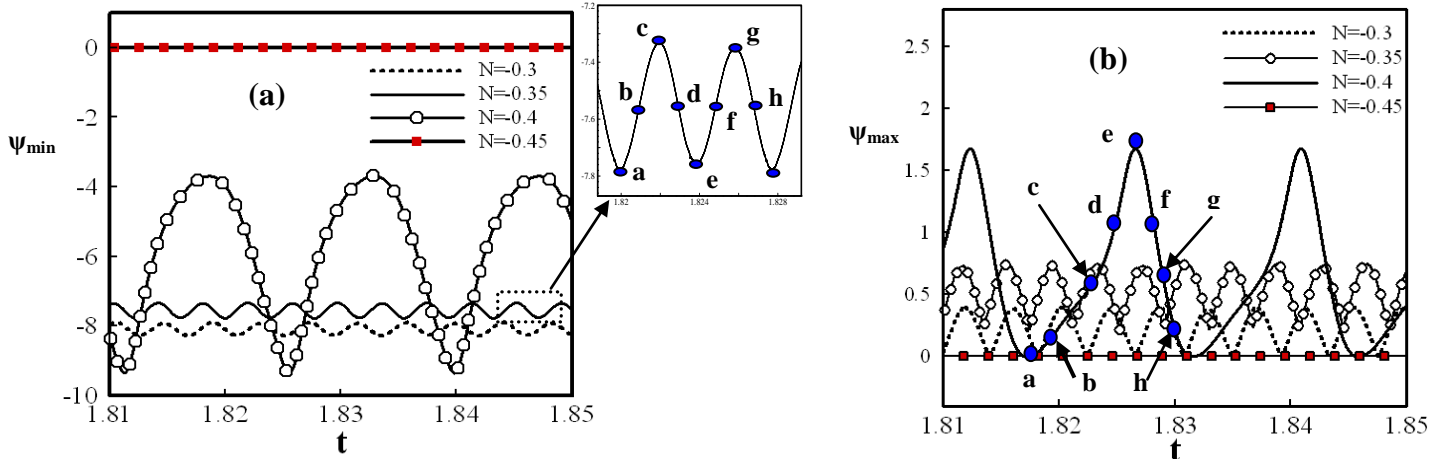


Figure 2 : Evolutions temporelles de : Ψ_{min} (a) et Ψ_{max} (b) pour $R_T = 200$, $M = -5$, $\varepsilon = 0.2$ et différentes valeurs de N , dans le cas de l'EM.

Ces figures montrent que toutes les oscillations obtenues sont périodiques et leur période, τ , est fonction de N . Le tableau 3 donne les valeurs de la période τ des oscillations pour quelques valeurs typiques de N .

Tableau 3 : Effet de N , sur la période des oscillations de l'EM, pour $M = -5$ et $\varepsilon = 0.2$.

Rapport des forces de volume, N	-0.3	-0.35	-0.4
$\tau = 1/f$	$8.46 \cdot 10^{-3}$	$7.86 \cdot 10^{-3}$	$14.3 \cdot 10^{-3}$

Pour $N = -0.3$ et -0.35 , les variations temporelles de Ψ_{min} et Ψ_{max} sont caractérisées par la présence de deux pics par période, contre un seul pic qui caractérise les évolutions temporelles cycliques de Nu et Sh . Dans le plan de phase (Ψ_{min} , Nu), la projection résulte en un cycle limite étiré et plié en forme de 8. Pour $N = -0.4$, les évolutions temporelles de Ψ_{min} , Ψ_{max} , Nu et Sh sont caractérisées par un seul pic par période et la trajectoire dans le plan de phase (Ψ_{min} , Nu) est une simple courbe fermée (figure 3c).

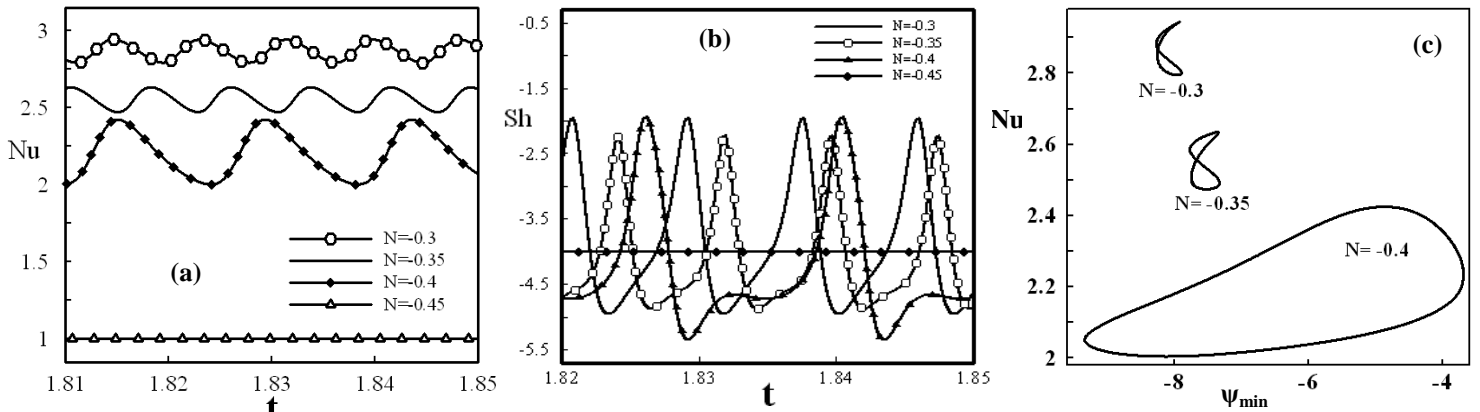
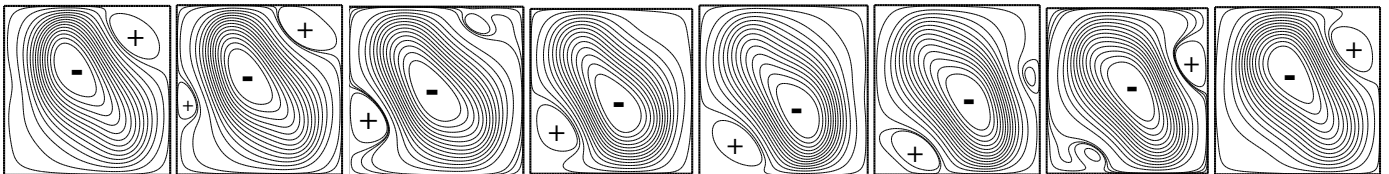


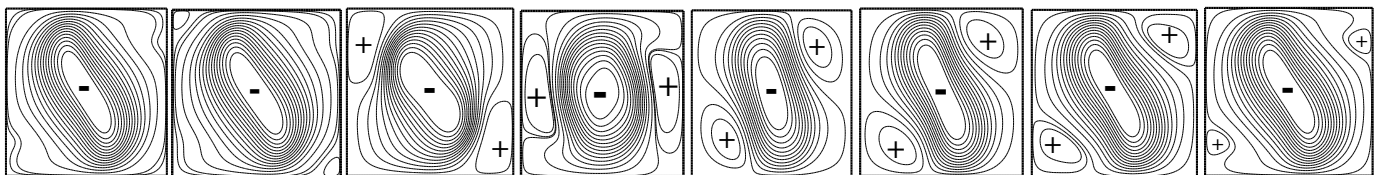
Figure 3 : Evolutions temporelles de : Nu (a), Sh (b) et Trajectoire dans le plan de phase (Ψ_{min} , Nu) (c) pour $R_T = 200$, $M = -5$, $\varepsilon = 0.2$ et différentes valeurs de N , dans le cas de l'EM.

Pour les fonctions Ψ_{\min} et Ψ_{\max} , les amplitudes des oscillations augmentent lorsque N décroît, alors que l'amplitude de Nu montre un comportement inverse. On déduit ainsi que la diminution de N favorise le développement de l'écoulement secondaire (dont l'intensité est quantifiée par Ψ_{\max}).

Les lignes de courant correspondant aux différents instants d'un cycle d'écoulement pour $N = -0.35$ et $N = -0.4$ sont présentées respectivement sur les figures 4a-h et 5a-h. Pour $N = -0.35$, la symétrie de l'écoulement est détruite. L'instant (a) est caractérisé par la présence d'une cellule principale et d'une autre secondaire localisée dans le coin supérieur droit (figure 4a). A l'instant (b), on voit apparaître une deuxième cellule secondaire à mi-hauteur de la cavité, au voisinage de la paroi gauche (figure 4b). Cette dernière augmente de taille en subissant un déplacement vers le coin inférieur (figures 4c-e), alors que l'autre cellule secondaire s'affaiblit pour disparaître à l'instant (d) (figures 4d-e). Durant l'autre moitié du cycle (figure 4e-h), on observe une évolution similaire à celle des figures 4a-e, mais avec des structures images (par rapport au centre de la cavité) de celles observées sur les figures 4a-e. Pour $N = -0.4$, les figures 5a-h montrent que l'écoulement redevient symétrique par rapport au centre de la cavité. Au début du cycle, la structure de l'écoulement est monocellulaire. En avançant dans le temps, deux petites cellules apparaissent dans les coins inférieur droit et supérieur gauche de la cavité. Ces cellules augmentent de taille et d'intensité au détriment de la cellule principale négative (figure 5c), puis subissent un déplacement le long des parois verticales de la cavité (figure 5d), pour s'installer dans les coins inférieur gauche et supérieur droit de la cavité (figure 5e). Pour le reste du cycle, les cellules secondaires s'affaiblissent progressivement (figures 5f-h) pour disparaître à la fin de ce dernier.



Figures 4 : Lignes de courant au cours d'un cycle d'écoulement (EM) pour $R_T = 200$, $M = -5$, $\varepsilon = 0.2$ et $N = -0.35$.



Figures 5 : Lignes de courant au cours d'un cycle d'écoulement (EM) pour $R_T = 200$, $M = -5$, $\varepsilon = 0.2$ et $N = -0.4$.

4. Conclusion

Quelques résultats numériques représentatifs illustrant l'effet de la porosité normalisée sur les comportements des solutions en régime instationnaire dans une cavité poreuse, saturée par un fluide binaire ont été présentés. Il a été trouvé que la diminution de la porosité normalisée de $\varepsilon = 0.8$ à $\varepsilon = 0.2$ agit de façon significative sur le gap et la nature des transitions subies par les différentes solutions. Autrement dit, les transitions caractérisant les différentes solutions pour $\varepsilon = 0.8$ sont retardées dans le cas de $\varepsilon = 0.2$ et les écoulements monocellulaires et bicellulaires (**EM** et **EB**) transitent directement vers le régime diffusif pour $M = 0$ et $M = 5$. La situation est différente pour $M = -5$ pour laquelle on a observé que l'**EM** devient oscillatoire périodique dans la gamme $-0.4 \leq N \leq -0.3$ et transite ensuite vers le régime diffusif après une diminution minimale de N . Finalement, il est à souligner que la porosité normalisée affecte aussi la nature des oscillations et de manière considérable.

Remerciements: Le CNRST est vivement remercié pour son support.

Références

- [1] J. C. Legros, P. Goemaere et J. K. Platten, 1985, "Soret coefficient and the two-component Bénard convection in the Benzene-Methanol system", *Phys. Rev. A*, vol.32, pp. 1903-1905.
- [2] J. K. Platten, 2006, "The Soret effect: A Review of Recent Experimental Results", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, pp. 5-15.
- [3] Khadiri, A., Hasnaoui, M., Amahmid, A. and Riabi, A. "Soret effect on double-diffusive convection in a square porous cavity heated and salted from below", *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 57, pp. 848-868, 2010.
- [4] M. Bourich, A. Amahmid, and M. Hasnaoui, Double Diffusive Convection in a Porous Enclosure Submitted to Cross Gradients of Temperature and Concentration, *Energy Conversion Management*, vol. 45, pp. 1655-1670, 2004