

## Conditions critiques d'apparition de régimes thermoconvectifs multicellulaires dans une couche annulaire cylindrique poreuse saturée

Jabrane BELABID et Abdelkhalek CHEDDADI

«Systèmes Thermiques», Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, B.P. 765, Université Mohamed V-Agdal, B.P. 765, Rabat

cheddadi@emi.ac.ma, belabide@gmail.

**Résumé :** Ce travail présente une étude numérique de la convection naturelle dans un espace compris entre deux cylindres concentriques horizontaux, rempli par un milieu poreux saturé. Le but de ce papier est d'investiguer l'état d'équilibre des solutions stationnaires par une analyse de la stabilité linéaire. Cette étude est conduite en évaluant les valeurs des nombres de Rayleigh critiques correspondant aux frontières entre les régimes stables et ceux instables. La valeur du nombre de Rayleigh critique pour un rapport des rayons  $R=2$ , obtenue par l'analyse de la stabilité linéaire, est légèrement inférieure à celle donnée par une procédure numérique.

**Mots clés :** Convection naturelle, milieu poreux, solutions multiples, bifurcation, stabilité linéaire.

### 1. Introduction

Le transfert thermique par convection naturelle dans un espace compris entre deux cylindres concentriques horizontaux de températures différentes, rempli par un milieu poreux saturé ne cesse d'attirer l'attention de nombreux chercheurs au cours de ces dernières décennies. La motivation pour ces recherches réside dans leur grand nombre d'applications technologiques et industrielles telles que l'isolation thermique, les réacteurs nucléaires, les lignes souterraines de transmission électrique pour n'en nommer que quelques unes. Ce problème a été étudié à la fois analytiquement et numériquement. Les régimes considérés dans ce papier ont été étudiés auparavant par plusieurs auteurs: Caltagirone [1], Burns and Tien [2], Himasekhar et Bau [3] et Rao et al [4], par exemple. La stabilité des écoulements a été étudiée notamment par Charrier-Mojtabi et al [5] en fonction du rapport de leurs rayons, par la méthode de Galerkin.

Ce travail vise à présenter une nouvelle analyse de la stabilité linéaire des solutions stationnaires, caractérisées par des régimes mono- ou bi-cellulaires.

### 2. Equations

Le problème étudié est celui de la convection naturelle dans un anneau concentrique horizontal différentiellement chauffé, rempli d'un milieu poreux (Figure 1). Le cylindre intérieur de rayon  $r_i$  et le cylindre extérieur de rayon  $r_o$  sont conservés à des températures uniformes et constantes, respectivement,  $T_i$  et  $T_o$  avec  $T_i > T_o$ .

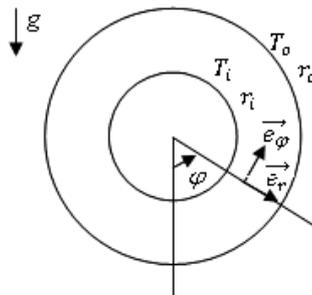


Figure 1: Schéma de définition

Le milieu poreux est saturé par un fluide newtonien incompressible. Les coordonnées polaires sont utilisées. Les équations adimensionnelles qui régissent le problème en formulation température-fonction de courant sont données par :

$$\nabla^2 \psi = -Ra \left( \sin \phi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \nabla^2 T \quad (2)$$

Dans ces équations,  $\psi$  est la fonction de courant définie par  $u = \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$  et  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$  et  $Ra$  est le nombre de Rayleigh défini par :  $\frac{g\beta_T K \Delta T r_i}{av}$ .

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$r = 1 : T = 1 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad ; \quad r = R : T = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0$$

où  $R$  est le rapport de forme défini par  $R = r_o/r_i$ . La symétrie géométrique du problème étudié conduit à l'ajout de deux nouvelles conditions aux limites

$$\phi = 0, \pi : \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

### 3. Analyse de la stabilité linéaire

#### 3.1. Cadre théorique

Dans ce problème, les études antérieures ont montré qu'il y a multiplicité de solutions pour les nombres de Rayleigh relativement élevés. Nous étudions dans le présent travail l'état d'équilibre des solutions stationnaires obtenues, afin de déterminer les valeurs du nombre de Rayleigh critiques, permettant de délimiter les domaines où chaque solution est stable ou instable. La théorie de stabilité linéaire est utilisée.

Une solution  $S_0$  d'un problème dynamique est stationnaire si elle n'évolue pas dans le temps. Cet état d'équilibre est dit linéairement stable si, en perturbant très légèrement la solution autour de cette position, elle revient à sa position d'équilibre après un temps suffisamment long. L'analyse de la stabilité d'une solution  $\vec{S}_0$  consiste donc à superposer à cette solution à l'état d'équilibre une perturbation infinitésimale  $\overline{\delta S}$ , et à étudier l'évolution temporelle de la solution pour les temps très longs. La solution sera dite linéairement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\vec{S}_0 + \overline{\delta S}) = \vec{S}_0$$

Dans le cas contraire, elle est qualifiée d'instable.

Dans ce travail, la méthode utilisée pour évaluer la stabilité linéaire des solutions stationnaires obtenues par la méthode ADI est décrite dans [6, 7]

Soit le problème dynamique :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{f}_u(\vec{S})$$

où  $\vec{f}_u = \{f_u^i, i = 1, \dots, n\}$  est une fonction vectorielle suffisamment régulière dépendant d'un paramètre  $u$  et  $\vec{S} = \{S^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  est une grandeur vectorielle. Posons  $\vec{S}_0$  la solution stationnaire du problème dynamique et notons  $\overline{\delta S} = \{\delta S^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  la perturbation appliquée à  $\vec{S}_0$  alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{S}_0 + \overline{\delta S}) &= \vec{f}_u(\vec{S}_0 + \overline{\delta S}) \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} (\overline{\delta S}) &= \vec{f}_u(\vec{S}_0 + \overline{\delta S}) - \vec{f}_u(\vec{S}_0) = J_{\vec{f}_u}[\vec{S}_0] \overline{\delta S} + o((\overline{\delta S})^2) \end{aligned}$$

où  $J_{\vec{f}_u}[\vec{S}_0] \overline{\delta S}$  est la matrice jacobienne de  $\vec{f}$  évaluée en  $\vec{S}_0$ . Si la perturbation est suffisamment petite, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\overline{\delta S}) &\approx \vec{f}_u(\vec{S}_0) + J_{\vec{f}_u}[\vec{S}_0] \overline{\delta S} \\ &\Rightarrow \\ \overline{\delta S}(t) &= \left[ \exp \left( J_{\vec{f}_u}[\vec{S}_0] t \right) \right] \overline{\delta S}(t=0) \end{aligned}$$

où  $\exp \left( J_{\vec{f}_u}[\vec{S}_0] t \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( J_{\vec{f}_u}[\vec{S}_0] t \right)^j$ . Pour déterminer le comportement de  $\overline{\delta S}(t)$ , il faut se placer dans la base propre  $\{\vec{\psi}_i, i = 1, \dots, n\}$  de la matrice jacobienne. La perturbation initiale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base :  $\overline{\delta S}(t=0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{\psi}_i$ . on obtient alors :

$$\overrightarrow{\delta S}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(\lambda_i t) \overrightarrow{\psi}_i$$

Où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres (réelles ou complexes) de  $J_{\overrightarrow{f}_u}[\overrightarrow{S}_0]$  satisfaisant  $J_{\overrightarrow{f}_u}[\overrightarrow{S}_0] \overrightarrow{\psi}_i = \lambda_i \overrightarrow{\psi}_i$ . Le critère de stabilité stipule qu'une solution stationnaire est dite linéairement stable si et seulement si  $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < 0$ . Le seuil d'instabilité  $u_c$  s'obtient de façon itérative en calculant, pour chaque écoulement de base  $\overrightarrow{S}_0(u)$ , les modes propres dominants  $\lambda(u)$ . Le seuil de bifurcation est obtenu après avoir localisé une transition par le changement de signe de la partie réelle d'une valeur propre, pour deux valeurs proches d'un paramètre de bifurcation  $u$  qui est le nombre de Rayleigh dans cette étude. Pour déterminer les valeurs propres de plus grande partie réelle de la matrice  $J_{\overrightarrow{f}_u}[\overrightarrow{S}_0]$ , nous avons utilisé la méthode d'Arnoldi.

### 3.2. Algorithme d'Arnoldi

La méthode d'Arnoldi [8] est une méthode de projection de type Krylov qui permet, entre autres, de résoudre un problème important dans le calcul scientifique: la détermination du spectre d'une matrice de très grande taille. L'algorithme est le suivant :

Soit  $A$  une matrice carrée,  $\overrightarrow{x}_0$  un vecteur de départ et  $\varepsilon$  la précision.

```

Début
 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_0$ 

 $\lambda_{anc} \leftarrow 1; \lambda \leftarrow 0$ 
tant que  $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$  faire
 $\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$ 
 $\overrightarrow{b} \leftarrow \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$ 
 $\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{b}$ 
 $\lambda \leftarrow {}^t\overrightarrow{b}\overrightarrow{x}$ 
retourner  $\lambda, b$ 
Fin

```

Dans ce travail la norme euclidienne a été utilisée :  $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{{}^t\overrightarrow{x}\overrightarrow{x}}$ . Pour utiliser une autre norme, il faut changer le calcul de  $\lambda$ :  $\lambda \leftarrow \frac{{}^t\overrightarrow{b}\overrightarrow{x}}{{}^t\overrightarrow{b}\overrightarrow{b}}$ .

### 3.3. Résultats de l'analyse de la stabilité

Nous présentons ici le cas d'un espace annulaire de rapport de forme  $R=2$ . Pour des valeurs de Rayleigh assez grandes, deux solutions stationnaires existent, avec des structures monocellulaire et bicellulaire (Figure 3). Nous avons obtenu ces deux types de solutions par simulation numérique des équations gouvernantes, utilisant la méthode des différences finies avec le schéma ADI.

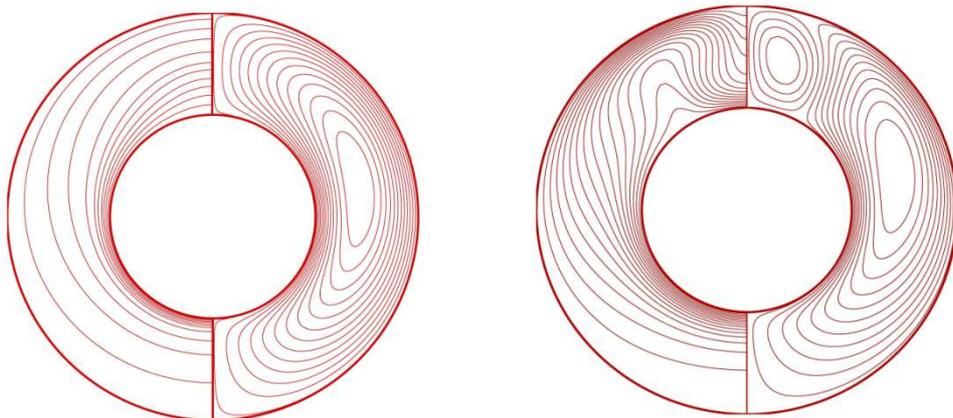


Figure 3: Régimes mono- et bi-cellulaire obtenus numériquement pour :  $R=2, Ra=120$

L'étude de la stabilité linéaire de ces solutions a été menée conformément à la procédure présentée ci-dessus.

S'agissant des structures monocellulaires, la figure 4 montre que la valeur propre à plus grande partie réelle évaluée pour chaque valeur de  $Ra$  décroît rapidement vers zéro lorsqu'on abaisse progressivement  $Ra$ . La valeur critique du nombre de Rayleigh correspond au passage par l'axe horizontal de la courbe représentant la variation de la partie réelle étudiée. Les solutions monocellulaires sont instables pour des valeurs de  $Ra$  au-dessus de  $Ra_c$ .

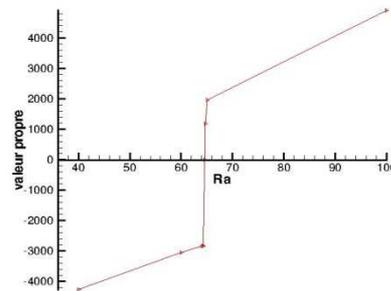


Figure 4 : Variation de la plus grande partie réelle de valeur propre en fonction de  $Ra$  pour  $R=2$

La figure 5 présente le diagramme de bifurcation des états stationnaires obtenus en traçant le nombre de Nusselt global défini par (3), en fonction du nombre de Rayleigh, pour  $R=2$ .

$$Nu = -\frac{1}{\pi} \ln R \int_0^{\pi} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta \quad (3)$$

La valeur critique du nombre de Rayleigh a été évaluée à  $Ra_c = 62$ , pour un maillage  $71 \times 71$ . Au passage par cette valeur, les solutions stationnaires stables deviennent instables (partie discontinue de la courbe). Cette valeur reste acceptablement proche de celle que nous avons obtenue numériquement dans une étude précédente : 62,4.

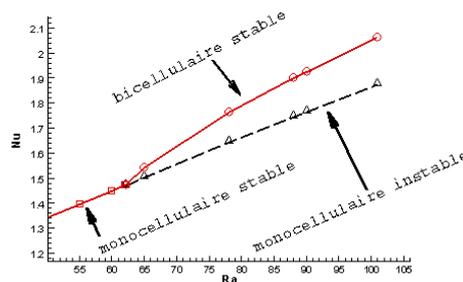


Figure 5 : Diagramme de bifurcation pour  $R=2$  dans un maillage  $71 \times 71$

Une étude de sensibilité vis-à-vis du maillage a été effectuée. La figure 6 représente la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction de  $\frac{1}{ds} = \frac{2}{(R+1)d\tau d\varphi}$ . A partir d'un maillage de  $71 \times 71$ , les valeurs obtenues pour le nombre de Rayleigh critique ne changent plus et restent égales à 62.

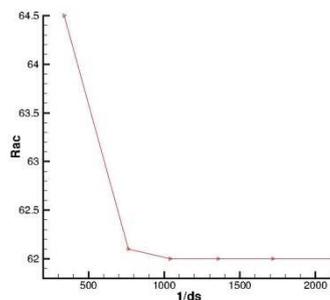


Figure 6 : Effet du maillage sur le seuil de bifurcation pour  $R=2$

## Conclusion

La convection naturelle dans un espace annulaire poreux a été étudiée. Une analyse de stabilité linéaire des solutions obtenues numériquement a été menée. Cette étude a permis d'obtenir pour  $R = 2$  la valeur du nombre de Rayleigh critique. Nous avons montré, par une étude de sensibilité, que le seuil de bifurcation déterminé varie en fonction du maillage. Pour des maillages assez fins, une valeur asymptotique a été obtenue. Cette valeur est très proche de celle obtenue par une procédure numérique. La présente étude devrait être étendue à d'autres valeurs du paramètre  $R$ .

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique ( $m^2 s^{-1}$ )
$K$	perméabilité ( $m^2$ )
$P$	pression ( $Pa$ )
$T$	température ( $K$ )
$u, v$	composantes polaires de la vitesse ( $ms^{-1}$ )
$r$	coordonnée radiale adimensionnelle
$Ra$	nombre de Rayleigh

## Symboles grecs

$\beta_T$	coefficient d'expansion thermique ( $K^{-1}$ )
$\mu$	viscosité dynamique ( $kgm^{-1}s^{-1}$ )
$\nu$	viscosité cinématique ( $m^2s^{-1}$ )
$\rho$	densité ( $kg m^{-3}$ )
$\psi$	fonction de courant
$\varphi$	coordonnée angulaire ( $rad$ )

## Exposants, indices

$i$	intérieur
$o$	extérieur

## Références

- [1] J.P. Caltagirone, Thermoconvective instabilities in a porous medium bounded by two concentric horizontal cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, 65, 337–362, 1976.
- [2] J.P. Burns, C.L. Tien, Natural convection in porous media bounded by concentric spheres and horizontal cylinders, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 22, 929–939, 1979.
- [3] K. Himasekhar and H. H. Bau, Two-dimensional bifurcation phenomena in thermal convection in horizontal concentric annuli containing saturated porous media, *J. Fluid Mech*, 187, 267-300, 1988.
- [4] Y. F. Rao, K. Fukuda and S. Hasegawa, Steady and transient analysis of natural convection in a horizontal porous annulus with Galerkin method, *J. Heat Transfer*, 109, 919-927, 1987.
- [5] M.C. Charrier-mojtabi, A. Mojtabi et J.P. Caltagirone, Three dimensional convection in an annular porous media, *European mechanics colloquium*, 138, 75-77, 1981
- [6] G. Petrone, E. Chenier and G. Lauriat, Stability of free convection in air-filled horizontal annuli: influence of the radius ratio. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47, 3889-3907, 2004.
- [7] C. K. Mamun and L. S. Tuckerman, Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow, *Phys. Fluids*, 7, 80-91, 1995.
- [8] W.E. Arnoldi, The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem, *Q. Appl. Math.*, 9, 17, 1951.