

Convection thermosolutale dans un milieu annulaire fluide de rapport de forme modéré

Brahim ELMOUSTAINE, Abdelkhalek CHEDDADI

Equipe de Recherche en Systèmes Thermiques et Écoulements Réels (ERSTER)

Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohammed V-Agdal, Rabat

elmoustainebrahim@gmail.com; cheddadi@emi.ac.ma

Résumé : On étudie le problème de la convection thermosolutale dans un milieu annulaire, compris entre deux cylindres très longs, coaxiaux et isothermes, rempli d'un fluide binaire considéré comme étant visqueux et incompressible. Les équations modélisant le problème sont discrétisées à l'aide de la méthode des différences finies. L'étude porte sur les effets des paramètres de contrôle (nombre de Rayleigh thermique $10^3 \leq Ra_T \leq 10^4$, nombre de Lewis $Le \geq 1$, nombre de Prandtl $Pr = 0.7$, rapport des forces volumiques $-2 \leq N \leq 2$ et rapport de forme de la cavité $R = 1.6$), sur la structure de l'écoulement ainsi que, sur les transferts de chaleur et de matière. Nous avons constaté que le nombre de Ra_T est un paramètre générateur d'écoulement dans la cavité annulaire, de même il améliore le transfert thermique et massique. D'autre part, le signe de N intervient sur le sens de rotation des cellules alors que le nombre de Lewis influe sur l'évolution des taux de transfert de chaleur et de masse.

Mots clés : Convection thermosolutale, Transfert de chaleur et de masse, Milieu annulaire, Différences finies, Méthode ADI.

1. Introduction

L'étude de la convection naturelle a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte du phénomène de la convection naturelle par les expériences de Bénard [1] et à l'analyse théorique de Rayleigh [2] au début du XX^{ème} siècle, jusqu'à présent. De nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection thermosolutale pour différents type de cavités. A titre d'exemple, C. Béghein et al [3] ont étudié la convection en double diffusion en examinant l'influence du rapport N sur les taux de transfert de chaleur et de masse, en régime stationnaire, dans une cavité carrée remplie d'air. M. Mamou et al [4] ont présenté une modélisation analytique et une étude numérique de la convection naturelle d'un fluide à double diffusion contenue dans une cavité rectangulaire. H. Beji et al [5] ont utilisé la méthode des volumes finis pour étudier la convection naturelle en double diffusion dans un espace annulaire vertical. E. Papanicolaou, V. Belessiotis [6] ont étudié la convection thermosolutale et le transfert de la chaleur et de masse dans une enceinte trapézoïdale pour mettre en évidence l'effet des paramètres de contrôle sur l'écoulement et les taux de transfert thermique et massique. S. Chen et al [7] ont utilisé le modèle de Boltzmann pour étudier la convection naturelle en double diffusion dans un système annulaire vertical avec des gradients de température et de concentration opposés.

2. Modèle physique et formulation mathématique

2.1. Description du Système

On se propose d'étudier le problème de la convection thermosolutale dans un milieu annulaire, rempli d'un fluide binaire assimilé à un fluide visqueux incompressible, compris entre deux cylindres très longs, coaxiaux, horizontaux et isothermes. On suppose que les deux gradients de température et de concentration sont négligeables dans la direction axiale de façon à pouvoir restreindre l'étude à une section transversale perpendiculaire à l'axe des deux cylindres; le problème devient alors bidimensionnel (figure 1).

2.2. Hypothèses simplificatrices

- L'écoulement du fluide au sein de la cavité est laminaire et bidimensionnel.
- Le fluide est newtonien et incompressible satisfaisant à l'approximation de Boussinesq avec

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)) \quad (1)$$

β_T est le coefficient de dilatation thermique du fluide : $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_{P,C}$

β_C est le coefficient de dilatation massique du fluide : $\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial C} \right]_{P,T}$

- Les conditions de symétrie permettant de travailler sur un demi-espace annulaire avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $r \in [r_i, r_o]$.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes dans la gamme de température et de concentration étudiée.
- On néglige le transfert d'énergie par rayonnement ainsi que les effets Soret et Dufour.

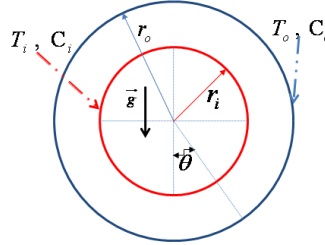


Figure 1:Schéma du problème

2.3. Équations adimensionnelles en formulation fonction de courant

On applique les principes de conservation, et on écrit les équations obtenues sous forme adimensionnelle en coordonnées polaires, on obtient :

➤ Equation de conservation de la masse :

$$\omega = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (2)$$

➤ Equation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = Ra_T Pr \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta \right) + N \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial r} \sin \theta \right) \right] + Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \quad (3)$$

Cette équation fait apparaître trois nombres sans dimensions caractéristiques du problème définis par : $Ra_T = \frac{\beta_T g \Delta T r_i^3}{\nu \alpha}$; $N = \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T}$; $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, respectivement : nombre de Rayleigh thermique, rapport des forces de flottabilité et nombre de Prandtl.

➤ Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (4)$$

➤ Equation de conservation des espèces :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{1}{Le} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right) \quad (5)$$

Où $Le = \frac{\alpha}{D}$ est le nombre de Lewis, représentant le rapport entre les deux diffusivités.

2.4. Forme adimensionnelle des conditions aux limites

Les équations précédentes sont soumises aux conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

• $r = 1, \quad \psi = 0, T = C = 1 \text{ et } u = v = 0 \quad (6)$

• $r = R, \quad \psi = 0, T = C = 0 \text{ et } u = v = 0 \quad (7)$

• La symétrie par rapport au plan vertical contenant l'axe des cylindres permet d'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \psi = 0 \quad (8)$$

• Les conditions aux limites sur la vorticité ω s'écrivent :

$$r = 1 \text{ ou } r = R \text{ et } \forall \theta : \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \omega = 0 ; \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi \text{ et } \forall r : \omega = 0 \quad (9)$$

Ces équations sont discrétisées par la méthode des différences finies centrées, avec le schéma ADI.

3. Résultats et discussion

3.1. Effet des nombres de Lewis et de Rayleigh pour les cas $N = 2$ et $N = -2$

3.1.1. Champ de la fonction de courant et puissance d'écoulement

Dans le cas $N = 2$, les cellules de convection conservent le sens de rotation obtenu dans le cas de la convection thermique pure $N = 0$ (sens direct dans le demi-espace de gauche), le fluide montant le long du cylindre intérieur (chaud) et descendant contre le cylindre extérieur (froid).

L'augmentation du nombre de Rayleigh favorise l'écoulement du fluide et l'accélération du mouvement, car les forces de flottabilité thermique et massique coopèrent pour améliorer la dynamique de l'écoulement dans l'espace. Lorsqu'on augmente le nombre de Lewis à partir de la valeur 1, on s'approche progressivement de l'écoulement dans le cas thermique pur ($N=0$) (figure 2.a).

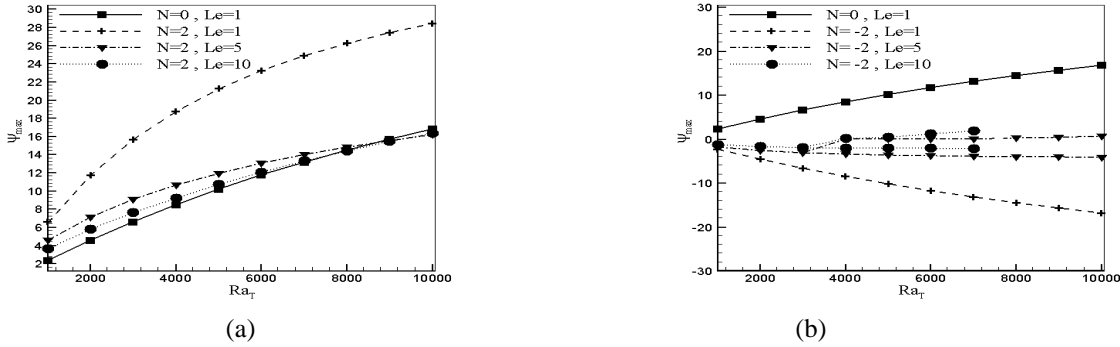


Figure 2 : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant ψ_{max} en fonction du nombre de Ra_T et Le pour $N = 2$ et $N = -2$.

Dans le cas $N = -2$, les cellules de convection tournent dans le sens indirect, le fluide descendant le long du cylindre intérieur (chaud) et montant contre le cylindre extérieur (froid). Le changement de sens de l'écoulement est justifié par celui du signe de ψ_{max} (figure 2.b).

Dans les cas suivants ($N = 0$) et ($N = -2, Le = 1$), on obtient deux écoulements symétriques par rapport à un axe horizontal $\psi_{max} = 0$ (figure 2.b). Quelque soit la valeur du nombre de Ra_T , on constate sur les tracés des lignes de courant (figure 3) une vraie symétrie d'écoulement par rapport au centre de la cavité.

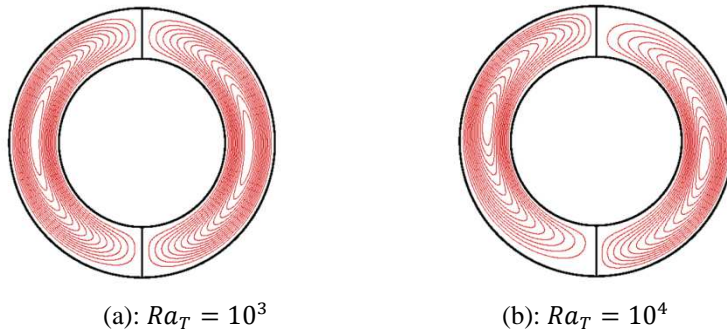


Figure 3: Les lignes de courant pour le cas $N = 0$ (demi-espace à gauche), et pour le cas $N = -2, Le = 1$ (demi-espace à droite)

On constate que la valeur ψ_{max} est faible dans les cas $Le > 1$. Par ailleurs la dynamique de l'écoulement devient compliquée si on augmente le nombre de Rayleigh thermique, car il y a un démarrage d'un régime multicellulaire à partir de $Ra_T = 4 \cdot 10^3$, pour $Le \geq 5$: une cellule de taille importante tourne dans le sens indirect occupant pratiquement 85% de la cavité et une autre plus petite tourne dans le sens direct (figure 7.b)

3.1.2. Transfert thermique et massique

- Effet du nombre de Rayleigh thermique Ra_T

D'après la figure 4, on constate une amélioration du transfert de la chaleur et de masse avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique. Cet accroissement résulte de l'importance accrue des forces de volume thermique et solutale en raison de l'augmentation de Ra_T . Pour $Le > 1$, le transfert de masse est plus important que celui thermique, car comme le montre la relation (10) la force de volume massique est amplifiée par rapport à la force de volume thermique.

$$Ra_C = N Le Ra_T \quad (10)$$

- Effet du nombre de Lewis Le

Pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh thermique, le nombre de Nusselt diminue alors que le nombre de Sherwood augmente lorsque le nombre de Lewis varie de 1 à 10 : la diminution de Nusselt est due à la faiblesse de l'écoulement, les valeurs de ψ_{max} diminuent et s'approchent de celles de la convection thermique pure $N = 0$. Donc l'effet de la convection thermosolutale sur le taux de transfert thermique devient faible. Alors

que l'augmentation de Sherwood est engendrée par l'amplification intense de Rayleigh massique Ra_C suivant la relation (10).

Lorsque $Le = 1$, les transferts thermique et solutal se développent d'une façon similaire. De plus, ils sont plus importants par rapport au cas thermique pur ($N = 0$). Dans le cas où les forces de flottabilité coopèrent, le transfert (thermique, massique) est nettement supérieur à celui où les forces thermique et massique s'opposent.

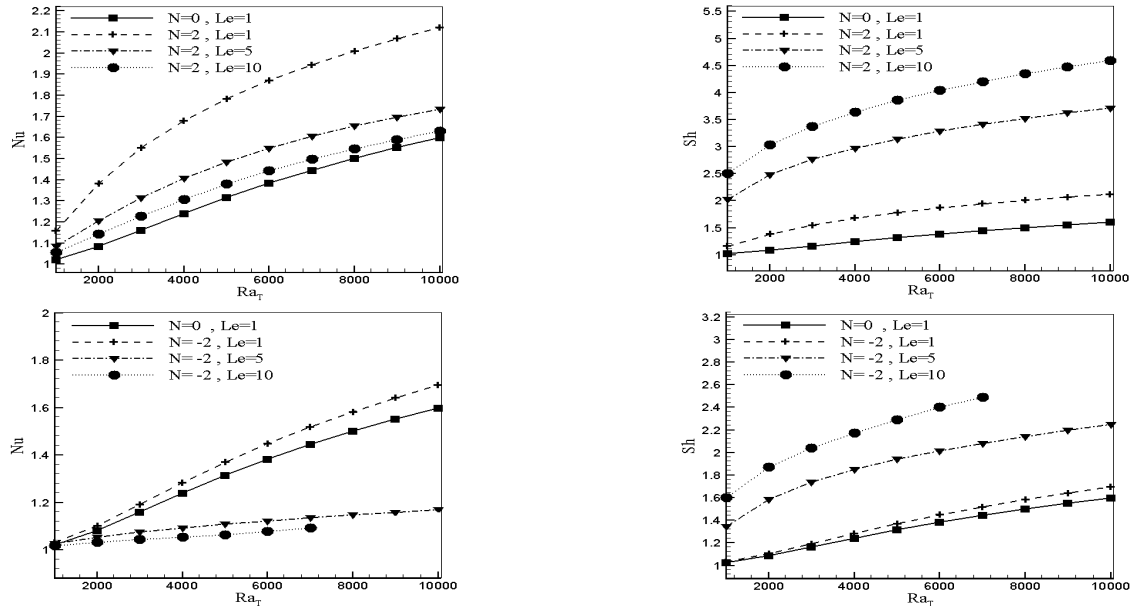
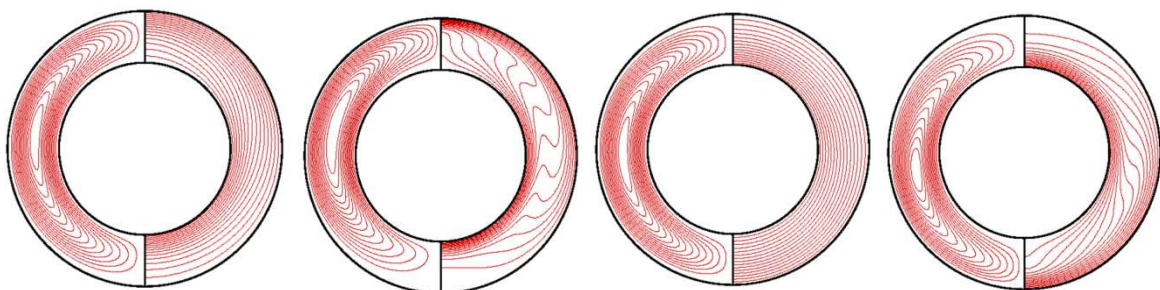


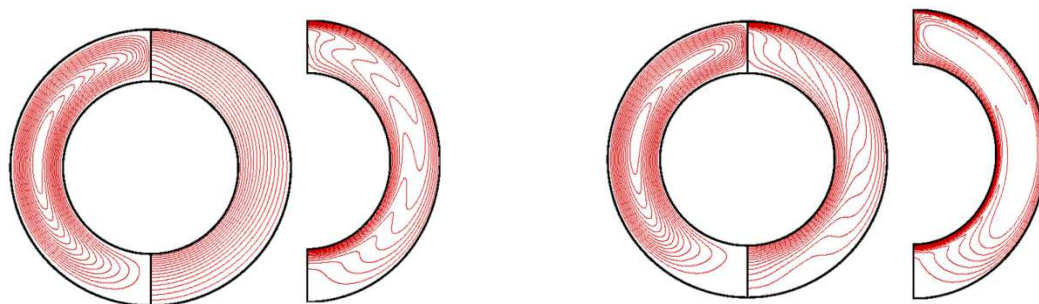
Figure 4: Variation des nombres de Nusselt et Sherwood en fonction de Ra_T , Le et N

Quand $Le = 10$ et dans le cas où les forces de flottabilité coopèrent, le transfert thermique reste supérieur à celui de la convection naturelle thermique pure. Mais dans le cas où les forces thermique et solutale s'opposent, le nombre de Nusselt devient inférieur à celui de la convection thermique pure. Le transfert de masse dans les deux cas (forces coopérantes et opposées) reste supérieur à celui de la convection thermique pure.

Dans le cas $N = -2$ et $Le = 10$, on obtient un régime oscillatoire à partir de $Ra_T = 8 \cdot 10^3$; ce régime est hors du domaine de la présente étude.

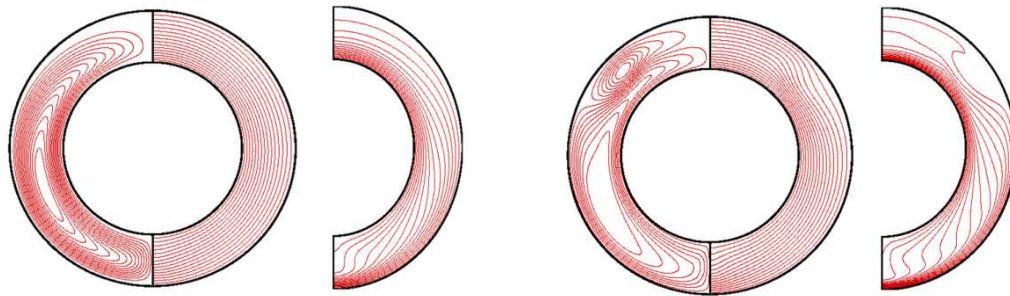


(a) $N = 2, Ra_T = 10^3$ (b) $N = 2, Ra_T = 10^4$ (c) $N = -2, Ra_T = 10^3$ (d) $N = -2, Ra_T = 10^4$
Figure 5 : Lignes de courant (gauche) et isothermes /isomasses (droite)
 $Le = 1$



(a) $Ra_T = 10^3$ (b) $Ra_T = 10^4$
Figure 6 : Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu) et isomasses (droite)
 $N = 2$ et $Le = 10$

Pour les valeurs du nombre de Ra_T faibles, avec $Le = 1$ on obtient une quasi-stratification radiale de température (concentration). L'accroissement de Ra_T entraîne la distorsion de la stratification des lignes isothermes (isomasses) (figure 5). Les épaisseurs des couches (thermique et massique) sur les deux parois de la cavité varient considérablement en fonction du signe du rapport des forces de flottabilité N .



(a) $Ra_T = 10^3$

(b) $Ra_T = 7.10^3$

Figure 7 : Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu) et isomasses (droite)
 $N = -2$ et $Le = 10$

Quand $Le > 1$ et lorsque le nombre de Rayleigh Ra_T varie entre 10^3 à 10^4 , on perd la stratification des isomasses plus vite que celle des isothermes (figure 6.a, figure 7.a). Cela prouve que la convection solutale est beaucoup plus importante que celle thermique.

Conclusion :

Dans cette étude, nous avons constaté que la distribution de la température et de la concentration ainsi que la puissance d'écoulement varient considérablement en fonction des nombres Ra_T , Le et N . D'une part le nombre de Rayleigh thermique est un paramètre générateur d'écoulement dans la cavité annulaire, de même il améliore le transfert thermique et massique. D'autre part, le signe du N intervient sur le sens de rotation, sur l'apparition de régimes multicellulaires des cellules et sur les nombre de Nusselt Nu et Sherwood Sh .

Nomenclature

R	Rapport de forme,	α	Diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$
C	Concentration du soluté	ρ	Masse volumique, $Kg \cdot m^{-3}$
D	Diffusivité massique, $m^2 \cdot s^{-1}$	ν	Viscosité cinématique, $m^2 \cdot s^{-1}$
g	Accélération de la pesanteur, $m \cdot s^{-2}$	β	Coefficient d'expansion de fluide, K^{-1}
Le	Nombre de Lewis	ω	Vorticité
N	Rapport des forces de volume	ψ	Fonction de courant
Nu	Nombre de Nusselt	Indices	
Pr	Nombre de Prandtl	i	Intérieur
Ra	Nombre de Rayleigh	o	Extérieur
Sh	Nombre de Sherwood	T	Thermique
		C	Massique (solutal)

Références

- [1] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys.*, (7):62–79, 1901.
- [2] L. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside. *Phil. Mag.*, (32):529–538, 1916.
- [3] C. Béghein, F. Allard, F. Haghghat. Etude numérique de la double diffusion dans une cavité carrée. *Int. J Heat Mass Transfer*, (35):833–846, 1992.
- [4] M. Mamou, E. Bilgen, P. Vasseur. Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure. *Heat Mass Transfer*, (32):115– 125, 1996.
- [5] H. Beji, R. Bennacer, and R. Duval. double-diffusive natural convection in a vertical porous annulus *Numerical Heat Transfer, Part A* (36):153– 170, 1999
- [6] E. Papanicolaou, V. Belessiotis. Double-diffusive natural convection in an asymmetric trapezoidal enclosure: unsteady behavior in the laminar and the turbulent-flow regime. *Int. J Heat MassTransfer* (48): 191-209, 2005.
- [7] M. Krafczyk, S. Chen, J. Tölke. Numerical investigation of double-diffusive convection in vertical annuli with opposing temperature and concentration gradients. *Int. J Heat Fluid Flow* (31):217–226, 2010.