16èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2013)
Marrakech (Maroc), du 13 au 15 Novembre, 2013

Transferts de chaleur et de masse en milieu poreux saturé en géométrie annulaire : Influence du rapport des forces thermiques et solutales

Ahmed JA, Jabrane BELABID et Abdelkhalek CHEDDADI
« Systèmes Thermiques et Ecoulements Réels », Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat
jaahmed@hotmail.fr, belabide@gmail, cheddadi@emi.ac.ma

Résumé : Dans le présent travail, nous étudions l'influence du rapport de poussée ($0 \leq N \leq 5$) sur la convection naturelle double diffusive, dans une géométrie annulaire horizontale, l'espace entre les deux cylindres étant rempli d'un milieu poreux saturé. Le modèle numérique utilisé pour la discrétisation des équations adimensionnelles gouvernant le problème est basé sur la méthode des différences finies en utilisant le schéma ADI. Une étude de la sensibilité des résultats par rapport au maillage a été réalisée. On observe l'impact de N sur la structure de l'écoulement et sur les transferts thermique et solutal. L'étude porte sur un espace annulaire de rapport de forme radial égal à 2.

Mots clés : Convection naturelle, double diffusion, milieu poreux, différences finies, rapport des forces thermiques et solutales.

1. Introduction :

L'étude du transfert de chaleur et de masse dans un espace poreux délimité par deux cylindres coaxiaux, horizontaux, concentriques et isothermes, a fait l'objet d'un certain nombre d'études au cours des dernières années. Cet intérêt est dû à la pertinence d'une telle géométrie dans de nombreuses applications industrielles, telles que les systèmes de stockage thermique, l'industrie pétrolière (procédé de séparation et réacteurs), cryogénie, opérations de dessalement de l'eau de mer, etc. Dans cette géométrie le problème de diffusion thermique a été étudié numériquement et analytiquement par plusieurs auteurs [1,2]. Concernant la double diffusion thermique et solutale, elle a été, ces dernières années, le sujet de plusieurs travaux consacrés à différentes configurations : carrée [3], rectangulaire [4] ou annulaire poreuse [5]. Diverses méthodes ont été utilisées : différences finies, éléments finis, méthodes spectrales.

La présente contribution traite la résolution numérique du problème de la convection naturelle thermosolutale dans une géométrie annulaire poreuse saturée, limitée par deux cylindres coaxiaux, horizontaux soumis à des gradients de température et de concentration suivant les directions radiale et tangentielle, avec une masse volumique variant avec la température et la concentration suivant l'approximation de Boussinesq: (figure 1)

$$\rho = \rho\rho_0\big(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_S(S - S_0)\big) \qquad (1)$$

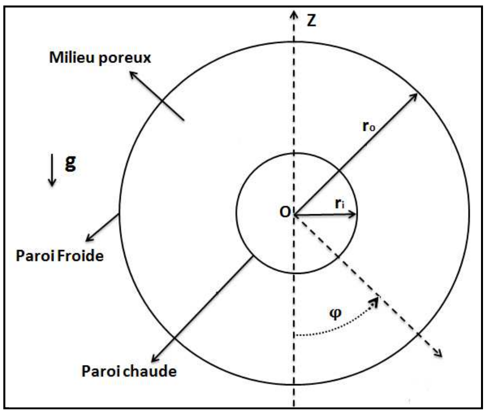


Figure 1 : Représentation schématique du problème.

2. Formulation mathématique et méthode numérique

2.1. Mise en équation

Les équations adimensionnelles du régime permanent sont décrits en formulation fonction de courant en coordonnées polaires (r,φ) :

- Equation de Darcy :

$$\nabla^2\Psi = -\mathrm{Ra_T}\left[\left(\sin\varphi\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}} + \frac{\cos\varphi}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi}\right) + \mathrm{N}\left(\sin\varphi\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{r}} + \frac{\cos\varphi}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \varphi}\right)\right] \qquad (2)$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$(\vec{\mathrm{V}}.\nabla)\mathrm{T} = \nabla^2\mathrm{T} \qquad (3)$$

- Equation de conservation de la masse :

$$(\vec{\mathrm{V}}.\nabla)\mathrm{S} = \mathrm{Le}^{-1}\nabla^2\mathrm{S} \qquad (4)$$

Où Ψ étant la fonction de courant définie par :

$\mathrm{V_r} = \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$: Composante radiale de la vitesse.

$\mathrm{V_\varphi} = -\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{r}}$: Composante tangentielle de la vitesse.

Les conditions aux limites s'écrivent :

- r = 1 T = 1, S = 1, $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = 0$, ∀ φ.
- r = R T = 0, S = 0, $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = 0$, ∀ φ.

La symétrie géométrique du problème par rapport au plan vertical contenant l'axe de cylindre permet d'ajouter une nouvelle condition aux limites :

- φ = 0 ou φ = π $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\varphi} = 0$, $\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{r}} = 0$.

Les nombres adimensionnels présents dans les équations sont le nombre de Rayleigh thermique : $Ra_T = \frac{g\beta_T\Delta T r_i^3}{\nu a}$, le rapport des forces thermiques et solutales : $N = \frac{\beta_S\Delta S}{\beta_T\Delta T}$, le nombre de Lewis : $Le = \frac{\alpha}{D}$ et le rapport de forme géométrique $R = \frac{R_e}{R_i}$. Les nombres adimensionnels de Nusselt et Sherwood représentant respectivement les transferts thermique et solutal sont donnés par les formules suivantes : nombre de Nusselt moyen : $Nu_{\mathrm{av}} = -\frac{1}{\pi}\mathrm{LnR}\int_0^\pi \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}\Big|_{\mathrm{r=R}} \mathrm{d}\varphi$, nombre de Sherwood moyen : $Sh_{\mathrm{av}} = -\frac{1}{\pi}\mathrm{LnR}\int_0^\pi \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{r}}\Big|_{\mathrm{r=R}} \mathrm{d}\varphi$.

2.2. Méthode de résolution

Les solutions sont obtenues en discrétisant les équations adimensionnelles par la méthode des différences finies centrées, en utilisant la méthode implicite aux directions alternées ADI, et l'algorithme de Tomas pour résoudre le système matriciel tridiagonal obtenu à partir des équations discrétisées. Les solutions numériques recherchées à travers le code de calcul représentent les solutions stationnaires du problème, un processus d'itération est terminé lorsque le critère suivant est satisfait dans chaque nœud du maillage :

$$\left|\frac{\chi^{n+1}-\chi^n}{\chi^n}\right| \leq 10^{-7}$$

Où χ représente T ou ψ.

3. Résultats et discussion

3.1. Sensibilité au maillage :

La précision des résultats numériques dépend du maillage choisi qui, tant qu'il est raffiné, l'observation du phénomène physique sera meilleure et les solutions obtenues seront les solutions admises. Le choix du maillage optimum (I,J) a été investigué dans le cas R=2, N=1, Le=10. Les figures 2 et 3 donnent des représentations de la variation du nombre de Nusselt et de Sherwood en fonction du maillage moyen $\frac{1}{ds}$, calculé par la relation : $\frac{1}{ds} = \frac{2(I-1)(J-1)}{3\pi}$, pour les valeurs du nombre de Rayleigh thermique : 50, 60 et 80.

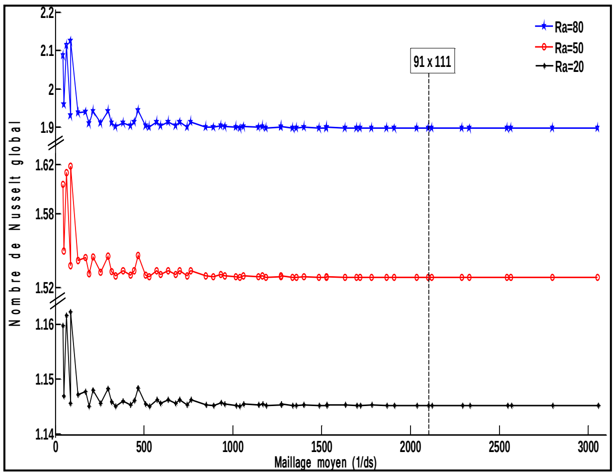


Figure 2 : Influence du maillage moyen sur le nombre de Nusselt moyen pour R = 2, Le = 10, N = 1.

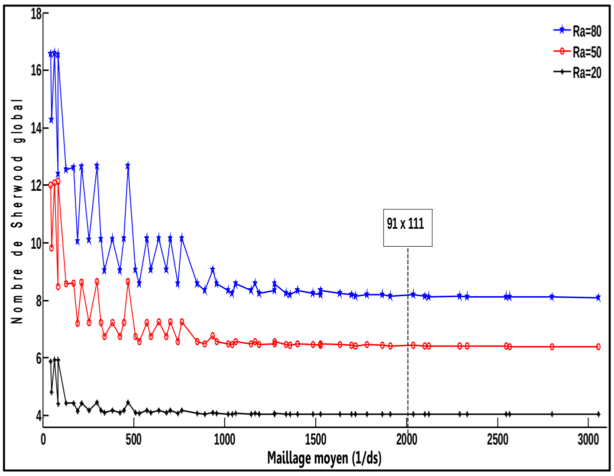


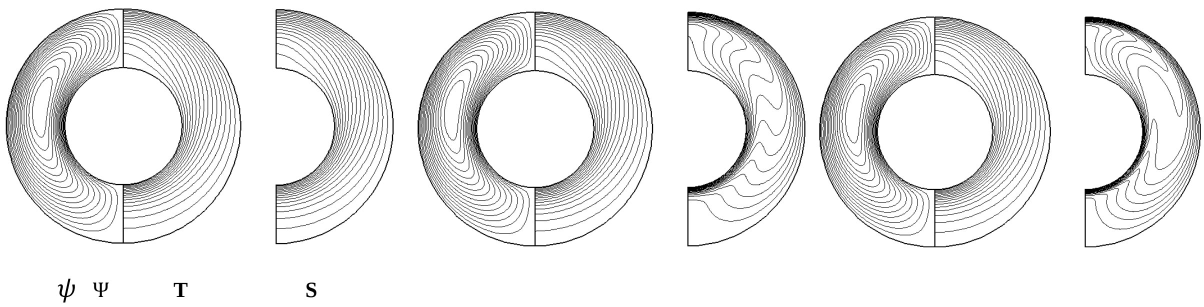
Figure 3 : Influence du maillage moyen sur le nombre de Sherwood moyen pour R = 2,Le = 10, N = 1.

On constate que les variations des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens aux différents maillages étudiés deviennent très faibles à partir de la valeur du maillage moyen qui correspond au maillage 91x111.

3.2. Effet du rapport de poussée N :

Nous nous intéressons dans cette étude à l'effet du rapport de poussée *N* sur la structure de l'écoulement et les transferts thermique et solutal au sein de la cavité poreuse. L'étude envisage le cas de la convection thermosolutale coopérante (forces thermiques et solutales de même sens, N ≥ 0). Les valeurs du rapport de poussée s'étendent de 0 jusqu'à 5, et le nombre de Lewis varie de 0.1 jusqu'à 10.

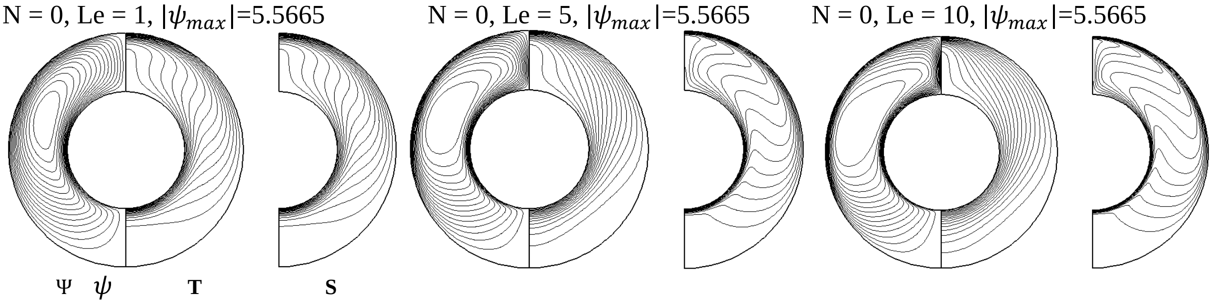
Pour la valeur de Le = 1, les forces de volume thermiques et solutales sont semblables, les isothermes et isoconcentration se confondent quelque soit la valeur de N (figure 4.a et 4.d).



(a) N = 0, Le = 1, $|\psi_{max}|$=5.5665

(b) N = 0, Le = 5, $|\psi_{max}|$=5.5665

(c) N = 0, Le = 10, $|\psi_{max}|$=5.5665



(d) N = 4, Le = 1, $|\psi_{max}|$=18.8002

(e) N = 4, Le = 5, $|\psi_{max}|$=10.0391

(f) N = 4, Le = 10, $|\psi_{max}|$=7.1687

Figure 4 : Lignes de courant, isothermes, isoconcentrations pour R=2, Ra=50

Pour la valeur du rapport de poussée N = 0, l'écoulement est monocellulaire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (demi espace gauche), pour les différentes valeurs du nombre de Lewis et Ra = 50, l'intensité d'écoulement est constant ($|\psi_{max}|$= 5.5665)**.** Dans cette situation, les forces de volume solutales sont nulles et le déplacement des particules s'effectue dans le sens antihoraire sous l'effet du gradient thermique. Lorsque les forces de volume solutales coopèrent avec les forces de volume thermiques N ≥ 0 et en augmentant le nombre de Lewis (diffusivité thermique α plus élevée que la diffusivité massique D), un régime de couche limite dynamique, thermique et solutale se met en place sur les parois intérieures et extérieures de la cavité, les couches limites dynamique et solutale deviennent de plus en plus minces avec l'accroissement du rapport de poussée et du nombre de Lewis (Figure 4).

Pour la même valeur du nombre de Lewis, on constate un accroissement de la fonction de courant maximale au fur et à mesure que le rapport de poussée augmente (figure 5), ce qui est dû à l'augmentation du terme source solutal dans l'équation de Darcy (2), entraînant par conséquent une intensification de l'écoulement. Pour la même valeur de N, la diminution du nombre de Lewis génère un accroissement de la fonction de courant maximale, ceci s'explique par le fait que lorsque le nombre de Lewis est faible le régime convectif est dominant (Figure 4d), tandis que, lorsque le nombre de Lewis augmente (Figure 4 e et 4 f) le régime convectif disparaît laissant place au régime diffusif, ce qui conduit dans ce cas à un régime relativement moins intense.

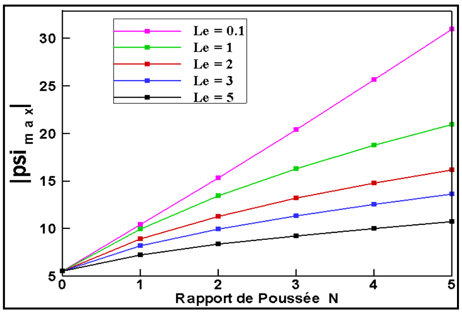


Figure 5 : Influence du rapport de poussée N sur l'intensité de l'écoulement pour R=2, Ra=50.

Les figures 6 et 7 représentent l'effet du rapport de poussée sur le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Sherwood moyen. Les résultats obtenus montrent que, pour la même valeur de Lewis, les nombres de Nusselt et Sherwood moyens augmentent avec l'accroissement du rapport de poussée. Pour une valeur de N donnée, le nombre de Nusselt moyen est plus élevé pour les faibles valeurs de Lewis, contrairement au nombre de Sherwood moyen qui est important pour les fortes valeurs de Lewis. Ceci s'explique par le fait que lorsque Le=1 les diffusivités thermique et massique sont égales (α = D). Pour Le < 1, la diffusivité thermique est plus petite (α < D) donc le transfert de chaleur est du principalement à la convection Nu > Sh. Toutefois, lorsque Le > 1, l'élément diffusif le plus rapide est celui de la chaleur et le transfert solutal est dominé par la convection (Sh > Nu).ce qui est en bon accord avec les résultats obtenus par M. Mamou, P. Vasseur and E. Bilgen [6].

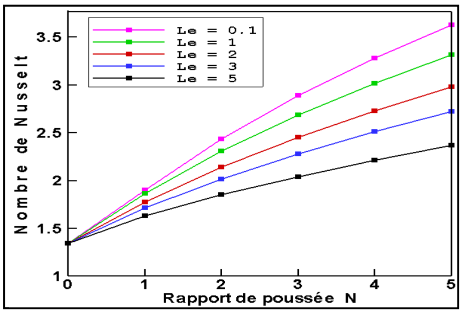


Figure 6 : Effet du rapport de poussée N sur le nombre de Nusselt moyen pour R=2 et Ra=50.

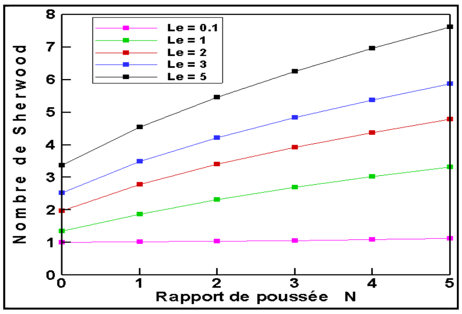


Figure 7 : Effet du rapport de poussée N sur le nombre de Sherwood moyen pour R=2 et Ra=50.

Conclusion

Le présent travail basé sur une étude numérique utilisant un modèle aux différences finies centrées en procédant par la méthode ADI, nous a permis d'aborder l'étude de la convection thermosolutale en géométrie annulaire cylindrique remplie par une matière poreuse saturée par un fluide binaire. Les systèmes linéaires tridiagonaux ont été résolus par l'algorithme de Thomas. Une étude de l'effet de maillage a été entreprise. La variation du rapport N des forces thermiques et solutales fait ressortir l'influence de ce paramètre, notamment sur la structure de l'écoulement ainsi que, les taux de transfert de chaleur et de masse.

Nomenclature

Symbole	Nom, unité
R	Rapport de forme radial $\frac{R_e}{R_i}$.
g	Accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$.
r	Coordonnée radiale adimensionnelle.
$R_{i,e}$	Rayon du cylindre intérieur, extérieur, m.
$T_{i,e}$	Température du cylindre intérieur, extérieur, K.
$S_{i,e}$	Concentration du cylindre intérieur, extérieur.
Le	Nombre de Lewis $Le = \frac{\alpha}{D}$
N	Rapport de poussée $N = \frac{Ra_S}{LeRa_T}$
Ra	Nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g\beta_T(T_i - T_e)R^3}{\upsilon\alpha}$
Nu_{av}	Nombre de Nusselt moyen.
Sh_{av}	Nombre de Sherwood moyen.

Symboles grecs

ρ	masse volumique, $Kg.m^{-3}$.
α	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$.
D	Diffusivité massique $m^2.s^{-1}$.
β_T	Coefficient de dilation thermique, k^{-1}.
β_s	Coefficient de dilation massique, k^{-1}.
Ψ	Fonction de courant adimensionnelle.

Exposant, Indices

i	interne
e	externe

Références

[1] M. C. Charrier-Mojtabi, Numerical simulation of two- and three-dimensional free convection flows in a horizontal porous annulus using a pressure and temperature formulation, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 40, No. 7, pp. 1521-1533, 1997.

[2] H.H. Bau, G. McBlane, and I.Sarferstein, Numerical simulation of thermal convection in an eccentric annulus containing porous media. *ASME* 83 WA/HT 34, 1983.

[3] Luzia A. Tofaneli, Marcelo J.S. de Lemos, Double-diffusive turbulent natural convection in a porous square cavity with opposing temperature and concentration gradients, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 36 (2009) 991–995

[4] M. Mamou, P. Vasseur and M. Hasnaoui, On numerical stability analysis of double diffusive convection in confined enclosures, *J. Fluid Mech*. (2001), vol. 433, pp. 209-250.

[5] A. Bahloul, M. A. Yahiaoui, P. Vasseur, R. Bennacer and H. Beji, Natural Convection of a Two-Component Fluid in Porous Media Bounded by Tall Concentric Vertical Cylinders, *J. Appl. Mech*. 73(1), 26-33 2005.

[6] M. Mamou, P. Vasseur and E. Bilgen, Double-diffusive convection instability in a vertical porous enclosure, *J. Fluid Mech*. (1998), vol. 368, pp. 263-289.