

Convection naturelle multicellulaire dans une cavité verticale allongée : Effets des conditions aux limites non uniformes

Lahcen EL MOUTAOUAKIL, Zaki ZRIKEM et Abdelhalim ABDELBAKI

*LMFE (CNRST-URAC 27), Département de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad,
B.P.2390, Marrakech, Maroc.*

Lahcen1873@gmail.com zrikem@uca.ma, abdelbaki@uca.ma

Résumé : Cette étude numérique est menée sur la convection naturelle bidimensionnelle en régime laminaire dans une cavité allongée remplie d'air de rapport de forme $A=40$. Les parois horizontales de l'enceinte sont adiabatiques alors que celles verticales sont maintenues à des températures qui varient linéairement avec la hauteur : $\theta_i(Y) = \gamma_i \times (Y/A - 0.5) + \delta_{i1}$, où $i=1$ pour la paroi chaude et 2 pour celle froide alors que $\gamma_i = -1, 0$ et 1 . Deux cas notés I et II correspondant respectivement à $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ et $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$ sont traités. Pour un nombre de Rayleigh moyen ($Ra_m = 10^4$), l'influence du paramètre de contrôle γ sur les écoulements secondaires est analysée. Les résultats obtenus montrent que la distribution des cellules secondaires dans le domaine dépend du cas considéré (uniforme et symétrique pour le premier cas et non uniforme pour le second) et que pour les deux cas leur intensité dépend fortement du paramètre γ . Par rapport au cas classique, le transfert de chaleur est amélioré ou réduit selon le cas et γ considérés.

Mots clés : convection naturelle, écoulement multicellulaire, cavité allongée, profils de température linéaires.

1. Introduction

La structure de l'écoulement d'air et le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée, ayant un très grand rapport de forme A , ont été largement étudiés à cause de leur importance dans plusieurs domaines d'application. Ainsi il a été démontré qu'en augmentant le nombre de Rayleigh Ra , on passe du régime de conduction au régime de couches limites et qu'à partir d'une valeur critique Ra_c , d'un écoulement laminaire monocellulaire à un écoulement multicellulaire au sein de la cavité.

Plusieurs travaux se sont penchés sur l'étude du régime multicellulaire dans une cavité verticale allongée bidimensionnelle afin de déterminer Ra_c et d'analyser, numériquement ou expérimentalement, l'écoulement secondaire et le transfert de chaleur en fonction de A , Ra et du nombre de Prandtl Pr [1-3]. Pour ce type de cavités, à partir des résultats de Bergholz [4], Korpela et al. [5] ont montré que la valeur de Ra_c peut être calculée en fonction de A et Pr par :

$$Ra_c = 8000(1 + 5/A)Pr \quad (1)$$

L'effet de conditions aux limites thermiques non uniformes sur les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur par convection dans une cavité à faible rapport de forme a fait l'objet de plusieurs études [6-7]. Pour la convection naturelle laminaire d'air dans une enceinte fermée verticale bidimensionnelle de très grand rapport de forme ($A > 20$), aucune étude n'a été trouvée sur l'influence des conditions aux limites thermiques sur les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur. Le cas de parois verticales soumises à des profils linéaires de température peut être rencontré ou utilisé pour contrôler l'écoulement et le transfert de chaleur à travers la cavité dans plusieurs situations pratiques (cavités à parois épaisses, refroidissement électronique, ...)

L'objectif de ce travail est d'étudier pour une cavité de rapport de forme $A=40$ et un nombre de Rayleigh Ra_m basé sur $(T_h - T_c)$ égal à 10^4 , l'influence de différents profils linéaires imposés (de températures moyennes T_h et T_c situées respectivement aux milieux des parois actives chaude et froide) sur les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur. L'effet de ces profils sur la formation et le mouvement des cellules secondaires qui se développent dans la zone centrale de la cavité est aussi exploré.

2. Modèle mathématique

Le domaine physique étudié est une cavité verticale très allongée de hauteur H et de largeur L . Les parois horizontales sont adiabatiques alors que celles verticales chaude (gauche) et froide (droite), notées respectivement 1 et 2, sont soumises à des profils de température variant linéairement avec la hauteur : $\theta_i(Y) =$

$\gamma_i \times (Y/A - 0.5) + \delta_{ii}$, où $\gamma_i = -1$ ou 1 . Dans ce travail où A , Ra_m et Pr sont fixés respectivement à 40 , 0.71 et 10^4 , on traite deux cas correspondant respectivement à $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ et $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$. Pour le cas I, la température moyenne des parois actives varie avec la hauteur Y : $\theta_m(Y) = 0.5 \times (\theta_1(Y) + \theta_2(Y))$. Pour le cas II, c'est le nombre de Rayleigh local défini par $Ra(Y) = g\beta\Delta T(Y)L^3 / (\nu\alpha)$ ($\Delta T(Y) = T_1(Y) - T_2(Y)$) qui varie en fonction de la hauteur.

Les propriétés thermophysiques de l'air sont supposées constantes, sauf la densité volumique de l'air dans le terme de poussée où l'approximation de Boussinesq est adoptée. Pour la convection naturelle laminaire bidimensionnelle dans une cavité, les équations adimensionnelles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont données par :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Ra_m Pr \theta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (5)$$

Les variables adimensionnelles sont données par :

$$X = x/L, Y = y/L, U = uL/\alpha, V = vL/\alpha, \theta = (T - T_c) / (T_h - T_c), \tau = t\alpha/L^2, P = p/\rho(\alpha/L)^2 \quad (6)$$

Les conditions aux limites imposées aux frontières du domaine sont :

$$U = V = 0, \theta(0, Y) = \gamma_1(Y/A - 0.5) + 1, \theta(1, Y) = \gamma_2(Y/A - 0.5), \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=A} = 0 \quad (7)$$

Le nombre de Nusselt moyen est calculé au niveau d'une surface donnée par :

$$Nu = \frac{1}{A} \int_0^A Nu_L dY \text{ avec } Nu_L = -\frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (8)$$

n désigne la direction perpendiculaire à la surface considérée.

Les équations 2 à 5 sont discrétisées par la méthode des volumes finis puis résolues par l'algorithme SIMPLE [8]. Leur résolution est faite en régime transitoire avec un pas de temps de 10^{-4} . La convergence, entre deux itérations successives, est considérée atteinte si l'écart relatif sur toutes les grandeurs calculées (U , V , θ et P) en chaque nœud du maillage ne dépasse pas 10^{-4} . L'étude de l'effet du maillage sur la détection des cellules secondaires et la précision des résultats a montré après plusieurs tests qu'un maillage uniforme de 40×260 permet de décrire les écoulements secondaires convenablement.

3. Résultats et discussion

3.1. Dynamique de formation des cellules secondaires

A partir d'un état initial correspondant à $U=V=0$ et $\theta=0.5$ en tout point de la cavité, nous avons suivi pour les cas I et II, pour $Ra_m=10^4$ et différentes valeurs de la pente γ , l'évolution de Nu (Figure 1) et le processus de formation des cellules secondaires. Pour le cas I, la figure 1(a) montre qu'initialement il y a une chute prévisible et rapide de Nu qui commence à augmenter au fur et à mesure que l'écoulement monocellulaire se développe dans la cavité. Sur une durée donnée, qui dépend de la valeur de γ , l'écoulement monocellulaire reste stable et par conséquent Nu ne varie presque plus. A partir d'un certain instant, Nu recommence à augmenter à cause des perturbations induites par la formation de cellules secondaires le long de l'axe centrale de la cavité. Une fois la formation des cellules secondaires est complétée, le Nu devient constant ce qui témoigne qu'un écoulement multicellulaire établi a été atteint. La figure 1(a), montre que la durée de stabilité de l'écoulement principal augmente avec la pente γ alors que la croissance de Nu , en passant de l'écoulement monocellulaire à celui multicellulaire établi, diminue.

Pour le cas II, la figure 1(b) montre qu'après la chute initiale de Nu , il augmente avec l'évolution de l'écoulement vers le régime monocellulaire. Ce régime est rapidement perturbé par la formation de cellules secondaires ce qui donne une évolution de Nu qui est irrégulière pour $|\gamma|=1.0$. Ceci peut être expliqué par l'intensité des cellules secondaires qui sont générées une par une à partir du bas pour $\gamma=-1$ ou à partir du haut pour $\gamma=1$.

Les simulations détaillées effectuées ont montré que dans les cas I, les cellules secondaires sont générées par paire de deux dont une par le bas et l'autre par le haut. Alors que dans le cas II, les cellules se forment une

par une en commençant par le bas pour $\gamma=-1$ ou par le haut pour $\gamma=1$. Les cellules ainsi formées se déplacent vers le milieu de la cavité pour libérer l'espace à celles qui suivent. Dans le cas I, le processus se poursuit jusqu'à ce que toute la zone centrale du domaine soit occupée par des cellules convectives uniformément répartie le long de l'axe de la cavité. Par contre dans le cas II, la formation des cellules secondaires s'arrête avant l'occupation de tout l'axe central car la différence de températures entre les deux parois actives varie avec la hauteur.

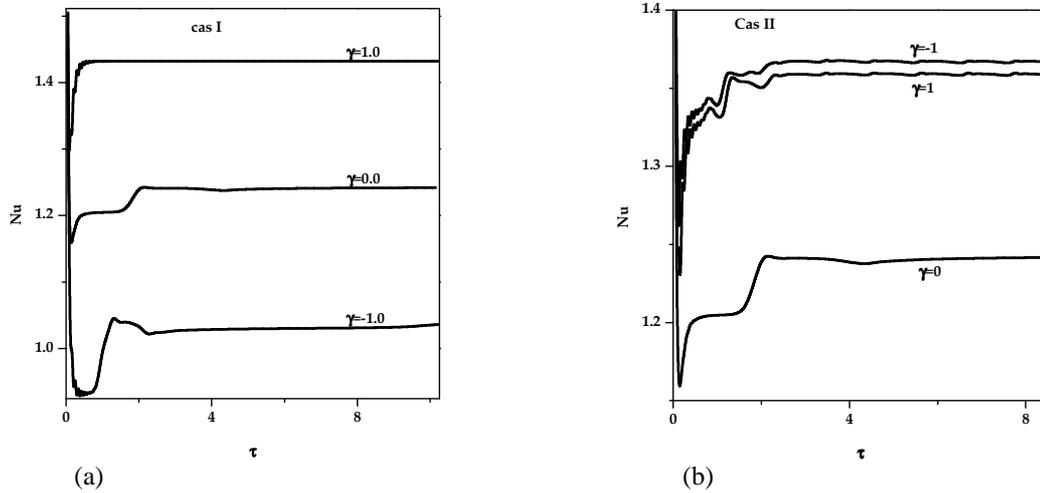


Figure 1. Evolution de $Nu(\tau)$ pour différentes valeurs de γ : cas I (a) et Cas II (b)

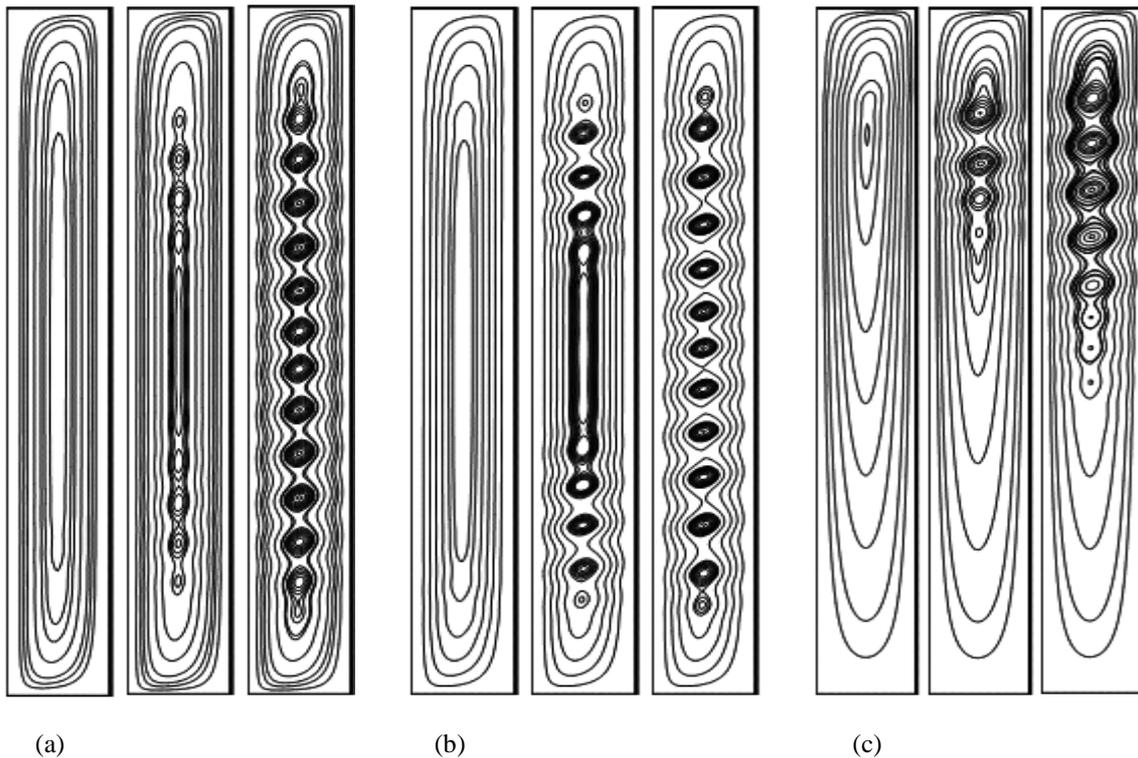


Figure 2. Dynamique de formation des cellules secondaires avec le temps : cas classique $\gamma=0$ (a), cas I, $\gamma=-1$ (b) et cas II, $\gamma=1$ (c). A à partir de la gauche [τ , Nu , ψ_{max}] sont donnés par :

- Cas classique avec $\gamma=0$ ([1.0,1.205,24.20], [1.4,1.206,24.45], [30,1.241,24.68]).
- Cas I avec $\gamma=-1$ ([0.5,0.90,30.369], [0.9,0.927,30.648], [3.0,0.99,29.874]).
- Cas II avec $\gamma=1$ ([0.3,1.210,29.027], [0.7,1.222,28.511], [1.8,1.247,28.802]).

Les processus de génération et de déplacement des cellules secondaires sont illustrés pour le cas classique ($\gamma=0$), le cas I ($\gamma=-1$) et le cas II ($\gamma=1$) respectivement sur les figures 2(a), 2(b) et 2(c). Sur ces figures, on peut

suivre en fonction du temps, l'évolution du nombre de cellules formées, du nombre de Nusselt moyen $Nu(\tau)$ et de la fonction de courant maximale $\psi_{max}(\tau)$. On peut constater pour les deux cas, qu'à chaque fois qu'une cellule est formée (une paire dans le cas I), il y a une légère augmentation de Nu et que ψ_{max} est atteinte au milieu de la cellule générée. Ceci montre que la majeure partie de la chaleur échangée par convection entre les parois verticales se fait par l'écoulement primaire.

3.2. Influence des profils linéaires de température

Dans le cas I ($\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ou ± 1), l'écoulement dans la cavité est contrôlé par la température moyenne des parois actives $\theta_m(Y)$ ($\theta_m(Y) = 0.5 + \gamma \times (Y/A - 0.5)$) qui varie avec la hauteur Y . Alors que dans le cas II ($\gamma = \gamma_1 = -\gamma_2 = \pm 1$), l'écoulement est contrôlé par le nombre de Rayleigh local $Ra(Y)$ ($Ra(Y) = Ra_m(2\gamma \times (Y/A - 0.5) + 1)$) qui varie aussi avec la hauteur Y .

3.2.1 Cas I : Influence de la température moyenne $\theta_m(Y)$

Dans le cas I, la distribution des cellules secondaires dans la zone centrale de la cavité est uniforme mais leur intensité est profondément affectée par le profil de la température moyenne des surfaces verticales de la cavité (sauf pour $\gamma = 1$ où l'écoulement est monocellulaire). Pour illustrer ceci, les variations de la composante horizontale de la vitesse $u(X=0.5, Y)$ le long de l'axe verticale $X=0.5$ de la cavité sont représentées sur la figure 3(a). Cette figure montre que l'amplitude des oscillations de $u(X=0.5, Y)$ est maximale pour $\gamma = -1$ et nulle pour $\gamma = 1$. L'effet des cellules secondaires sur le profil de température du fluide $\theta(X=0.5, Y)$ le long de l'axe vertical $X=0.5$ est donné sur la figure 3(b). On peut constater que le long de la partie où il y a des cellules secondaires ($\gamma = -1$ ou 0), $\theta(X=0.5, Y)$ oscille autour de $\theta_m(Y)$ alors qu'en leurs absences ($\gamma = 1$), les deux profils coïncident. A proximité des parois horizontales on enregistre des écarts importants entre $\theta(X=0.5, Y)$ et $\theta_m(Y)$ pour toutes les valeurs de γ . Ces écarts importants témoignent d'un écoulement primaire intense au voisinage des parois horizontales. A noter enfin que les lignes de courant, les variations de $u(X=0.5, Y)$, $\theta(X=0.5, Y)$ et de $\theta_m(Y)$ sont symétrique par rapport au centre de la cavité quelque soit la valeur de γ .

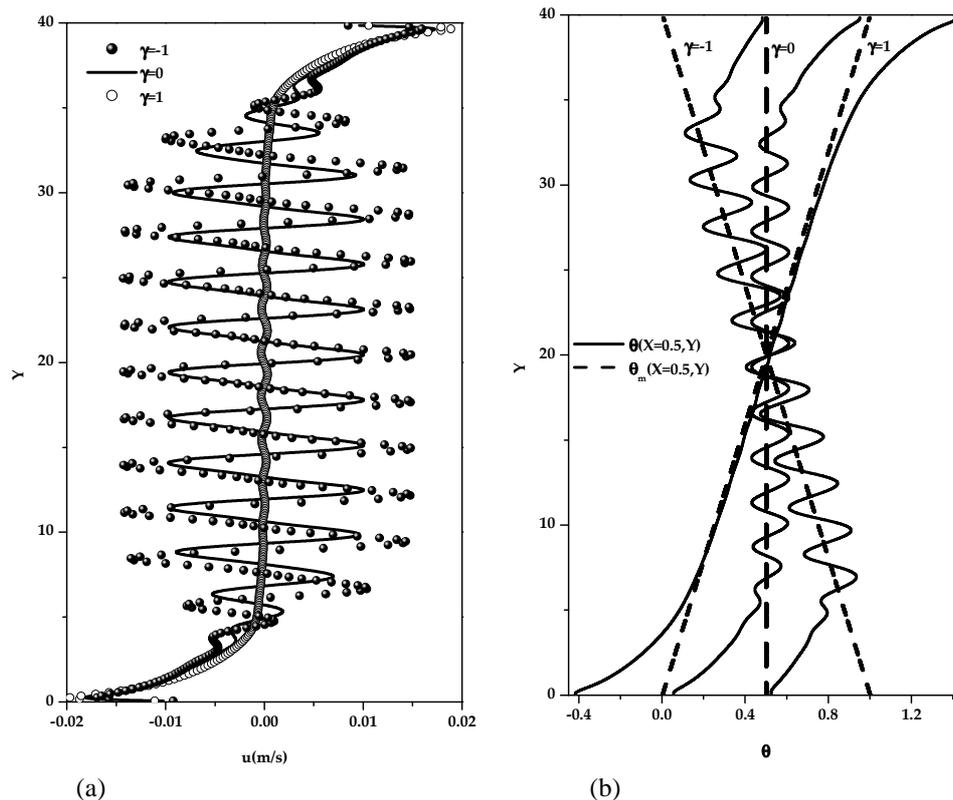


Figure 3. Variations le long de la médiane verticale pour le cas I : (a) la composante horizontale de la vitesse $u(X=0.5, Y)$ et (b) les températures du fluide $\theta(X=0.5, Y)$ et moyennes des parois $\theta_m(X=0.5, Y)$

L'analyse des résultats portés sur la figure 3, montre que pour $\gamma = -1$, l'intensité des cellules secondaires est plus importante car l'écoulement est instable à cause du gradient négatif de $\theta_m(Y)$ qui conduit à un fluide plus chaud dans la moitié inférieure de la cavité. Pour le cas classique correspondant à $\gamma = 0$, la stratification thermique est très faible du fait que $\theta_m(Y) = 0.5$ ce qui donne des cellules secondaires d'intensités plus faibles que

pour $\gamma=-1$. En passant à $\gamma=1$, le gradient de $\theta_m(Y)$ devient positif et élevé ce qui conduit à une stratification thermique importante qui empêche la formation de cellules secondaires.

3.2.2 Cas II : Influence du nombre de Rayleigh local $Ra(Y)$

Lorsque $\gamma=1$, $Ra(Y)$ croit avec la hauteur et les cellules secondaires n'existent que dans la partie supérieure de la cavité. Le cas $\gamma=-1$ est une situation inverse à la première où seule la partie inférieure du domaine est occupée par les cellules secondaires. Donc pour le cas II, la distribution des cellules convectives dans la cavité n'est plus uniforme si $\gamma \neq 0$.

Pour quantifier l'intensité des écoulements secondaires pour différentes valeurs de γ , on trace sur la figure 4(a) les variations de la composante horizontale de la vitesse $u(X=0.5, Y)$ le long de l'axe $X=0.5$. Pour $\gamma=0$, l'écoulement est symétrique par rapport au centre de la cavité et les milieux des cellules secondaires sont sur l'axe $X=0.5$. Pour $\gamma \neq 0$, l'écoulement est intense au voisinage de la paroi inférieure de la cavité alors qu'il est faible au voisinage de celle d'en haut pour $\gamma=-1$ et inversement pour $\gamma=1$. Cette dissymétrie au niveau de l'écoulement principal déplace les cellules secondaires légèrement vers la paroi froide pour $\gamma=-1$ et inversement pour $\gamma=1$. Les écoulements obtenus pour $\gamma=1$ et $\gamma=-1$ sont symétriques par rapport au centre de la cavité comme on peut le constater sur la figure 4(a). Contrairement au Cas I où la plus part des cellules secondaires ont la même intensité, le cas II avec $\gamma \neq 0$ est caractérisé par des cellules dont chacune a une intensité qui diffère des autres. Pour $|\gamma|=1$, c'est la troisième cellule à partir du bas pour $\gamma=-1$ ou à partir du haut pour $\gamma=1$ qui sont les plus intenses. L'intensité de deux autres cellules proches des surfaces horizontales est atténuée par la stratification thermique élevée à leur proximité.

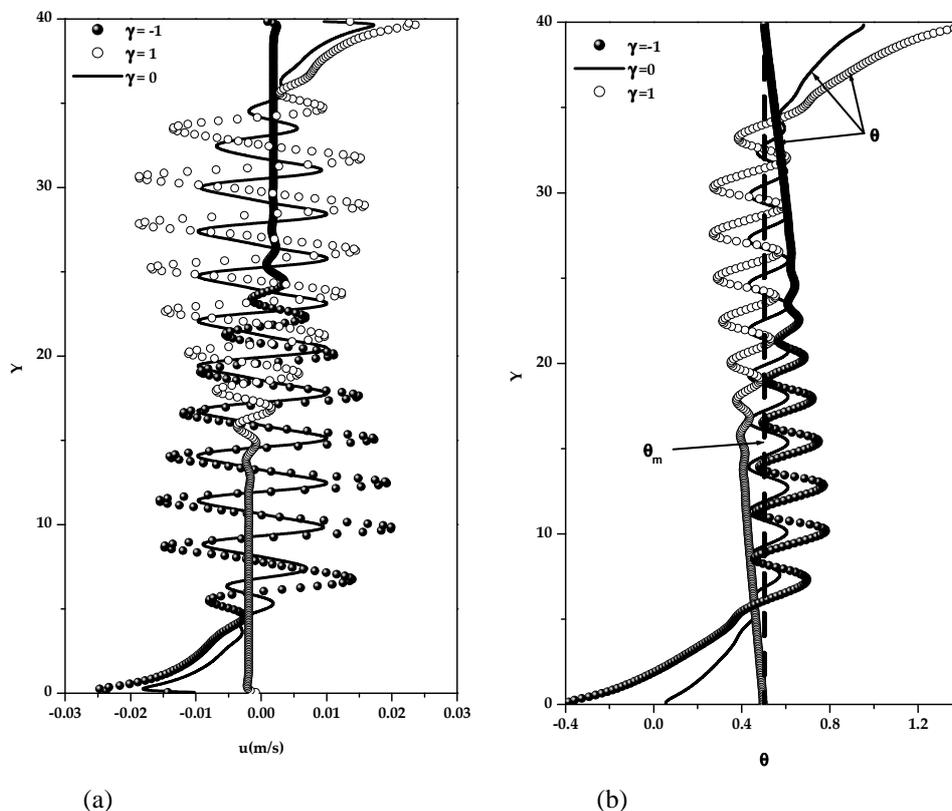


Figure 4. Variations le long de la médiane verticale pour le cas II : (a) la composante horizontale de la vitesse $u(X=0.5, Y)$ et (b) les températures du fluide $\theta(X=0.5, Y)$ et moyennes des parois $\theta_m(X=0.5, Y)$.

L'effet des cellules secondaires sur le profil de température du fluide $\theta(X=0.5, Y)$ le long de l'axe vertical $X=0.5$ est porté sur la figure 4(b). Pour $\gamma=0$, $\theta(X=0.5, Y)$ est symétrique par rapport au centre de la cavité et oscille autour de $\theta_m(Y) = \theta_m = 0.5$ dans la partie occupée par les cellules secondaires. Par contre pour $\gamma \neq 0$, on a toujours $\theta_m(Y) = \theta_m$ mais dans la partie occupée par les cellules secondaires, $\theta(X=0.5, Y)$ oscille autour d'une température supérieur ou inférieur à $\theta_m = 0.5$ respectivement pour $\gamma=-1$ ou $\gamma=1$. Au niveau des parois horizontales l'écoulement est faible pour $\gamma=-1$ en haut et en bas pour $\gamma=1$, ce qui donne en ces points $\theta(X=0.5, Y) = \theta_m$. Par contre si l'écoulement est important, des écarts élevés sont enregistrés entre les deux grandeurs, ainsi en bas de la cavité pour $\gamma=-1$ on a $\theta(X=0.5, Y) < \theta_m$ et $\theta(X=0.5, Y) > \theta_m$ en haut de la cavité pour $\gamma=1$.

