16èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2013)
Marrakech (Maroc), du 13 au 15 Novembre, 2013

# Evaluation des modèles de turbulence k-ε pour la convection naturelle dans les cavités verticales allongées

Lahcen EL MOUTAOUAKIL, Zaki ZRIKEM et Abdelhalim ABDELBAKI

*LMFE (CNRST-URAC 27), Département de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, B.P.2390, Marrakech, Maroc.*
*Lahcen1873@gmail.com* ***zrikem@uca.ma****, abdelbaki@uca.ma*

**Résumé :** Dans ce travail, les modèles de turbulence à deux équations de fermeture de la famille k-ε à bas nombre de Reynolds, les plus populaires ont été implémentés dans un code traitant la convection naturelle dans les cavités différentiellement chauffées. L'évaluation des performances de ces modèles, a été faite en termes de précision des résultats et du temps de calcul. Les champs dynamique et thermique déterminés par le code sont comparés à ceux expérimentaux disponibles dans la littérature pour une cavité de rapport de forme A=28.68. Les résultats obtenus ont montré que globalement le modèle RNG (ReNormalization Group) a les meilleures performances en termes de précision des champs thermiques et dynamiques. En plus, ce modèle a un temps de calcul CPU raisonnable et inférieur à celui des autres modèles testés

***Mots clés :*** modèles de turbulence k-ε, convection naturelle, cavité allongée, Simulation.

## 1. Introduction

Plusieurs modèles à deux équations basés sur le concept de l'hypothèse de Boussinesq (Modèles EVM) ont été développés pour simuler les écoulements turbulents dans plusieurs domaines d'application.. Dans cette catégorie, les modèles k-ε, où k représente l'énergie cinétique turbulente et ε son taux de dissipation, sont les plus populaires à cause de la précision raisonnable de leurs prédictions dans plusieurs configurations (Chen et Jiang [1]). La version standard de cette famille qui traite les zones proches des parois par les fonctions de paroi logarithmiques n'est pas très adéquate pour simuler les écoulements naturels au sein des milieux confinés. Ceux–ci sont mieux décrits en utilisant la version RNG (ReNormalization Group) développée par Yakhot et Orszag [2] ou celles k-ε à bas nombre de Reynolds (LRN) qui introduisent des fonctions d'amortissement dans leurs formulations mathématiques pour tenir compte de l'atténuation de la turbulence à proximité des parois solides. Ce type de modèles, qui permet de traiter l'écoulement jusqu'aux parois nécessite un maillage très serré dans les zones proches des parois pour une meilleure description de l'écoulement. Parmi les nombreuses versions k-ε (LRN) qui sont souvent utilisées dans la littérature, on peut citer celles élaborées par Jones et Launder [3] (JL), Launder et Sharma [4] (LS), Chien [5] (CHI). Dans ce travail, les modèles de la famille k-ε qui ont fait l'objet de l'étude bibliographique sont implémentés avec succès dans notre code de calcul. Par la suite, L'évaluation des performances de ces modèles en termes de précision des résultats et de temps de calcul sont évaluées en comparant leurs résultats avec ceux du travail expérimental de Betts et Bokhari [6], réalisé sur une cavité de rapport de forme A=28.68.

## 2. Modèle mathématique

Cette étude concerne les écoulements naturels turbulents dans les cavités verticales allongées différentiellement chauffées et remplies d'air (Pr=0.71). Les parois verticales de hauteur H sont maintenues isothermes à des températures $T_h$ et $T_c$ ($T_c<T_h$) alors que celles horizontales de longueur L sont adiabatiques. Le rapport de forme (A=H/L) et le nombre de Rayleigh ($Ra=g\beta\Delta TL^3/\nu\alpha$), avec $\Delta T=T_h-T_c$, sont les paramètres de contrôle du problème étudié. Le fluide est supposé Newtonien et la dissipation visqueuse est négligée dans l'équation de l'énergie. Les propriétés de l'air sont supposées constantes, sauf la masse volumique dans le terme de poussée où l'approximation de Boussinesq est adoptée.

Les équations moyennées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie en régime turbulent sont données par :

$$\frac{D\rho}{D\tau} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{DU_i}{D\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \overline{u_i u_j}\right] - g_i\beta(T - T_0) \quad (2)$$

$$\frac{DT}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu}{Pr}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j t}\right] \quad (3)$$

Les tensions de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ et le flux de chaleur turbulent $\overline{u_j t}$ qui apparaissent respectivement dans les équations 2 et 3 sont exprimés en fonction des champs dynamiques et thermiques moyens comme suit :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij}k - \nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (4)$$

$$\overline{u_j t} = -\frac{\nu_t}{Pr_t}\frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (5)$$

Les transferts de chaleur local et moyen adimensionnels sont définis au niveau de la paroi chaude par :

$$Nu_{loc} = \frac{L}{T_h - T_c}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} \quad \text{et} \quad Nu = \frac{1}{H}\int_0^H Nu_{loc}\,dy \quad (6)$$

Pour fermer l'ensemble des équations de transport 1 à 3, les modèles de turbulence RNG, LS, JL et CHI ont été utilisés.

Les équations (1-3) sont discrétisées par la méthode des volumes de contrôle et résolues par l'algorithme *SIMPLE* (Patankar [7]). Afin de réaliser un compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats de la simulation, une étude d'optimisation a été faite sur l'influence des pas d'espace et du temps. Cette étude a conduit au choix d'un maillage de 50×160 et à un pas de temps adimensionnel de $5\times10^{-6}$. On estime que la convergence est atteinte lorsque les écarts relatifs sur toutes les variables calculées, aux différents nœuds du maillage, deviennent inférieurs à $10^{-4}$ entre deux itérations successives.

## 3. Résultats et discussion

Pour évaluer les performances des modèles, le travail expérimental de Betts et Bokhari [6] est pris comme référence. Les mesures ont été effectuées sur une cavité verticale de largeur L=0.076m, de hauteur H=2.18m et de profondeur W=0.52m (A=H/L=28.68) dont les parois actives ont été maintenues à $T_h$=34.7°C et $T_c$=15.1°C ($Ra_1=0.86\times10^6$) ou à $T_h$=54.7°C et $T_c$=15.6°C ($Ra_2=1.43\times10^6$). Les parois horizontales sont bien isolées et les surfaces internes de très faibles émissivités.

### 3.1. Profils de vitesse

Sur la figure 1 sont représentés les profils de vitesse à différentes hauteurs (Y/A=y/H=0.1-0.9) pour $Ra=1.43\times10^6$. Le long de parois actives, la vitesse d'écoulement de l'air diminue en montant ou en descendant respectivement les parois chaude ou froide. En une hauteur donnée de la cavité, dans la région centrale du domaine, un profil de vitesse pratiquement linéaire est enregistré. Tous les modèles donnent pratiquement des profils de vitesse ayant des allures semblables et proches de ceux obtenus expérimentalement. Cependant la reproduction des valeurs expérimentales, surtout au voisinage des extrémums de la vitesse, varie d'un modèle à l'autre selon la section de la cavité et le nombre de Rayleigh considérés. Les écarts relatifs D avec l'expérience, sur les vitesses maximales et minimales à différentes hauteurs, ont été pris comme critère pour évaluer l'aptitude des modèles à décrire l'écoulement. Ainsi en tenant comptes des résultats obtenus pour les deux nombres de Rayleigh utilisés dans l'expérience de Betts et Bokhari, on trouve que le modèle RNG est le plus précis (D<10%) suivis des modèles CHI et JL (10%≤D<20%) qui ont une précision acceptable, alors que le modèles LS (D≥20%) a de faibles prédictions.

Malgré qu'ils soient de la famille des modèles k-ε (LRN), les modèles JL, CHI et LS donnent des résultats assez différents. Ceci peut s'expliquer par l'utilisation de fonctions d'amortissement différentes dont le rôle principal est de réduire le niveau de turbulence à proximité de la paroi. Il y a aussi les constantes de chaque modèle qui sont ajustées usuellement en se référant à des écoulements turbulents simples, bien connus expérimentalement. Le modèle RNG sans fonctions de paroi, fournit des prédictions précises, meilleures que celles des modèles k-ε (LRN).

### 3.2. Profils de température

La figure 2 représente les distributions de température adimensionnelle $\theta = \frac{T-T_c}{T_h-T_c}$ à différentes hauteurs (Y/A=0.1-0.9) pour $Ra=1.43\times10^6$. Globalement tous les modèles de la famille k-ε reproduisent avec plus de satisfaction les tendances observées expérimentalement. Les profils de température obtenus par différents modèles sont linéaires au niveau des parois actives où le transfert de chaleur se fait surtout par conduction dans la sous couche visqueuse. Les gradients de température sont importants en haut et en bas de la cavité respectivement sur les parois froide et chaude, alors qu'ils le sont moins au milieu. Dans la partie centrale de la cavité, les gradients de température sont faibles à cause du mélange du à la turbulence dans cette zone. Ces même remarques, peuvent être déduites des courbes de variation de $Nu_{loc}$ portées sur la figure 3 pour $Ra=1.43\times10^6$. Les modèles k-ε utilisés, donnent des variations d'allures comparables à celles obtenues par l'expérience pour le transfert de chaleur local. Cependant la précision des résultats pour le transfert de chaleur local ou moyen dépend du modèle de turbulence utilisé. Les profils du transfert de chaleur local obtenus par le modèle RNG, sont en bon accord avec ceux de l'expérience ce qui témoigne encore une fois de ses bonnes performances pour la configuration étudiée. Contrairement aux profils de vitesse, les modèles JL, LS et CHI donnent des résultats comparables et assez satisfaisant pour les profils de $Nu_{loc}$. La transition du régime laminaire à la turbulence le long des parois actives s'accompagne par une augmentation brusque du transfert de chaleur local. Pour le maillage utilisé, les modèles RNG, JL et LS ont pu capturer ce phénomène mais à des hauteurs légèrement différentes.

Les nombres de Nusselt moyen Nu, obtenus par les modèles sont comparés, sur le tableau 1, avec ceux déterminés expérimentalement (5.85 pour $Ra=0.86\times10^6$ et 7.57 pour $Ra=1.43\times10^6$). En tenant comptes des deux nombres de Rayleigh, dans l'ordre les modèles LS, RNG et JL sont les plus précis (D<10%) alors que le modèle CHI, l'est moins (10%≤D<20%).

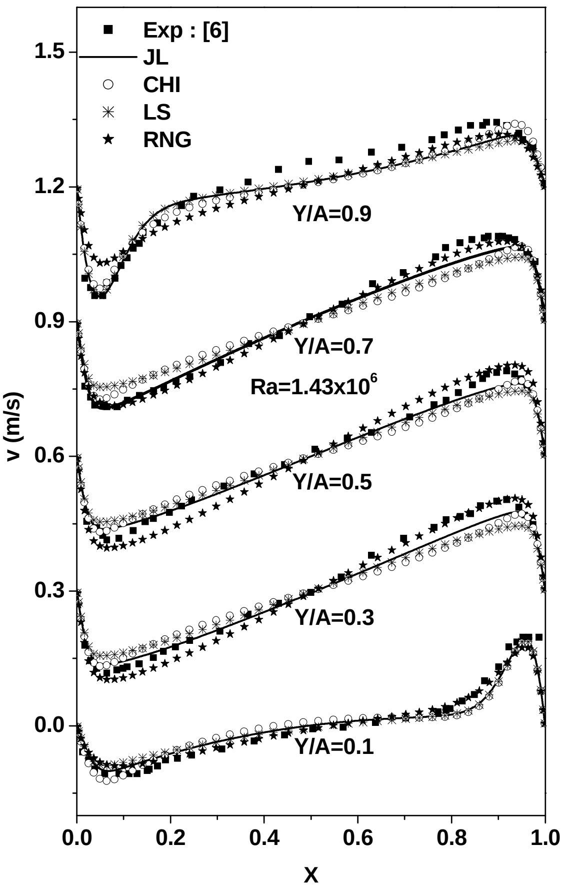


Figure 1. Profils de vitesse ($Ra=1.43\times10^6$)

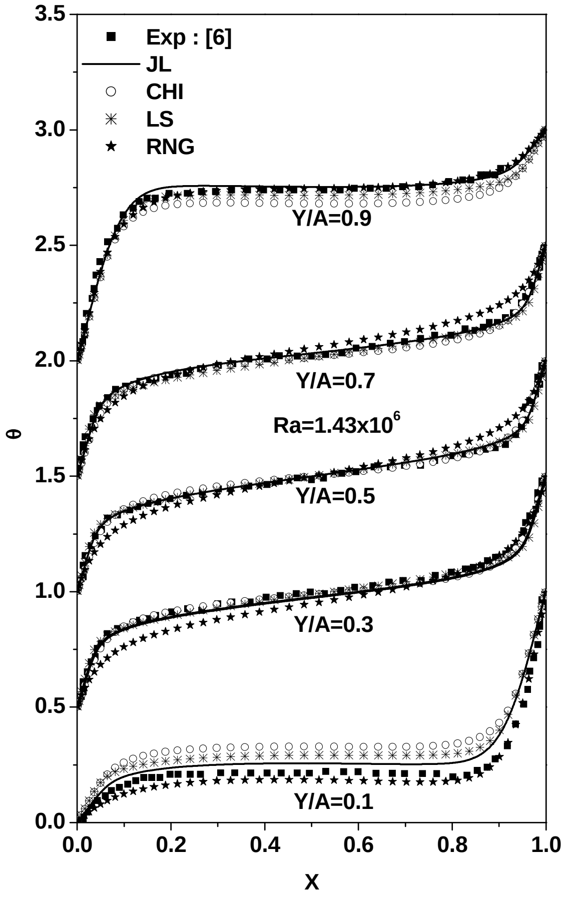


Figure 2.Profils de température ($Ra=1.43\times10^6$)

Tableau 1 : Nombres de Nusselt moyen Nu obtenus par les modèles k-ε pour $Ra_1=0.86\times10^6$ et $Ra_2=1.43\times10^6$

| Expérience | LS | JL | CHI | RNG |
|---|---|---|---|---|
| 5.85 ($Ra_1=0.86\times10^6$) | 6.00 | 5.68 | 5.09 | 6.56 |
| 7.57($Ra_2=1.43\times10^6$) | 7.45 | 6.60 | 6.83 | 7.69 |

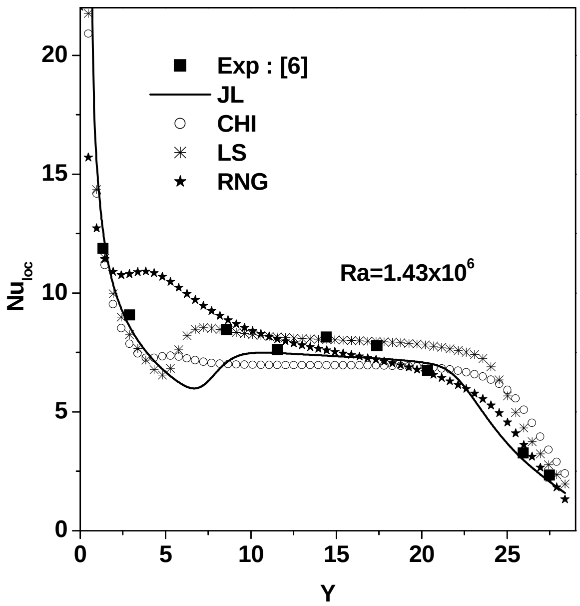


Figure 3. Profils du nombre de Nusselt local pour Ra=1.43×0[6]

### 3.3. Temps de calcul CPU

Pour les problèmes d'engineering, le temps de calcul est un facteur important dans l'évaluation des performances d'un modèle. Afin de comparer les temps de simulation, on a utilisé pour tous les modèles la même technique numérique, le même maillage, le même pas de temps et le même critère de convergence. Ainsi les différences sur le temps de calcul ne dépendent que du modèle de turbulence considéré. Toutes les simulations, ont été réalisées sur un ordinateur personnel Core 2 CPU, 2.00Ghz et une mémoire RAM de 1Go. Pour la cavité verticale différentiellement chauffée de Betts et Bokhari, les temps de calcul CPU sont résumés, pour les deux nombres de Rayleigh $Ra_1=0.86\times10^6$ et $Ra_2=1.43\times10^6$, sur le tableau 2. Le modèle le plus rapide est RNG, ce qui nous amène à conclure que les modèles les plus performants ne sont pas nécessairement les plus chers en temps de calcul. Le modèle LS, donne des résultats thermiques satisfaisants mais en un temps de calcul plus élevé. Les autres modèles JL et CHI demandent un temps de calcul assez élevé malgré que leurs prédictions dynamiques et/ou thermiques soient très moyennes.

Tableau 2: Temps de calcul CPU(min)

| Modèle | LS | JL | CHI | RNG |
|---|---|---|---|---|
| $Ra=0.86\times10^6$ | 35 | 34.6 | 35.5 | 20.1 |
| $Ra=1.43\times10^6$ | 45.4 | 47.6 | 41.1 | 29.6 |

## 4. Conclusion

Ce travail a été consacré à l'identification, parmi les modèles k-ε les plus utilisés, des modèles de turbulence les plus précis et numériquement les plus économiques pour simuler la convection naturelle dans les cavités à grand rapport de forme rencontrées dans les applications pratiques. Les résultats obtenus ont montré que globalement le modèle RNG a les meilleures performances en termes de précision des champs thermiques et dynamiques. En plus, ce modèle a un temps de calcul CPU raisonnable tout en restant inférieur à celui des autres modèles testés.

**Nomenclature**

| | |
|---|---|
| $A$ | rapport de forme de la cavité |
| $g$ | pesanteur, $ms^{-1}$ |
| $H$ | hauteur de la cavité, $m$ |
| $k$ | énergie cinétique turbulente, $m^2/s^2$ |
| $L$ | largeur de la cavité, $m$ |
| $Nu$ | nombre de Nusselt |
| $P$ | pression, Pa |
| $Pr$ | nombre de Prandtl |
| $Pr_t$ | nombre de Prandtl turbulent |
| $Ra$ | nombre de Rayleigh |
| $t$ | température fluctuante, $K$ |
| $T$ | température, $K$ |
| $u$ | vitesse fluctuante, $ms^{-1}$ |
| $U$ | vitesse moyenne, $ms^{-1}$ |
| $x, y$ | coordonnées cartésiennes, $m$ |
| $X,Y$ | coordonnées cartésiennes adimensionnelles |

Symboles grecs

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$ |
| $\beta$ | coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$ |
| $\varepsilon$ | taux de dissipation de $k$, $m^2s^{-3}$ |
| $\nu$ | viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$ |
| $\nu_t$ | viscosité cinématique turbulente, $m^2.s^{-1}$ |
| $\rho$ | masse volumique, $Kgm^{-3}$ |
| $\tau$ | temps, $s$ |

Indices

| | |
|---|---|
| 0 | référence |
| c | froid |
| h | chaud |
| i | direction i |
| loc | local |

## Références


[1] Q. Chen and Z. Jiang, Significant questions in predicting room air motion, *ASHRAE Trans*, Volume 98, pp. 929-939, 1992.

[2] V. Yakhot and S.A. Orszag, Renormalization group analysis of turbulence, *Journal of Scientific Computing*, Volume 1, pp. 3-51, 1986.

[3] W. Jones and B. Launder, The prediction of laminarisation with a two equation turbulence model, *International Journal of heat and mass transfer*, Volume 15, pp. 301-314, 1972.

[4] B.L. Launder and B.I. Sharma, Application of the energy-Dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Letter in Heat Mass Transfer*, Volume 1, pp. 131-138, 1974.

[5] K.Y. Chien, Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model, *AIAA Journal*, Volume 20, pp.s 33-38, 1982.

[6] P.L. Betts and I.H. Bokhari, Experiments of turbulent natural convection in an enclosed tall cavity, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Volume 21, pp. 675-683, 2000.

[7] S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, *Hemisphere*, Washington, D.C., 1980.