

Etude numérique d'un élément de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion chauffé par un fluide en écoulement pulsé

Radouane ElBahjaoui (a), Hamid El Qarnia (a) et El Khadir Lakhal (b)

- (a) Université Cadi Ayyad, Faculté des sciences Semlalia, Département de physique, B.P 2390, Marrakech, Maroc, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Energétique, Affilié au CNRST, URAC 27
- (b) Laboratoire d'Automatique de l'Environnement et Procédés de Transfert, Faculté des Sciences Semlalia-Département de Physique, Marrakech-Maroc, Affilié au CNRST, URAC 28.

elgarnia@uca.ma

Résumé: Le présent travail porte sur une étude numérique d'un élément de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion d'un matériau à changement de phase (MCP), la n-octadécane. L'élément de stockage d'énergie est constitué de deux tubes concentriques. L'espace annulaire de ceux-ci est rempli de MCP. Celui-ci est chauffé par un fluide caloporteur (Eau) en écoulement pulsé dans le tube intérieur. Le système ainsi conçu est modélisé mathématiquement en faisant appel à l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide et à l'équation de conservation d'énergie pour le MCP et le fluide. Une solution analytique a été développée pour le champ de vitesse transitoire du fluide. L'approche de volume fini a été adoptée pour discrétiser les équations de conservation d'énergie. Les équations algébriques et la solution analytique obtenues ont permis de mener une série d'investigations numériques dans le but d'examiner l'effet de la fréquence adimensionnelle d'oscillation du gradient de pression sur le transfert de chaleur mis en jeu dans l'élément de stockage d'énergie. Pour certaines valeurs du nombre de Reynolds, de la fréquence et de l'amplitude adimensionnelles de l'écoulement pulsé, les résultats obtenus ont mis en évidence l'importance que pourrait présenter un écoulement pulsé par rapport à un écoulement de Poiseuille, pour favoriser la fusion du MCP.

Mots clés: Stockage par chaleur latente, matériau à changement de phase, écoulement pulsé, méthode enthalpique.

1. Introduction

La demande croissante d'énergie et le cout élevé de celle-ci font que les travaux de recherche sur l'économie d'énergie sont d'actualité. Certaines recherches s'orientent vers les méthodes d'économie d'énergie en utilisant des moyens moins couteux et facilement accessibles. L'un des moyens d'économie d'énergie est le stockage.

Les systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente, utilisant les matériaux à changement de phase (MCP) solide-liquide, ont reçu, ces dernières années une attention particulière grâce à leur densité énergétique relativement élevée. A cette propriété, il faut aussi ajouter l'isothermie qui caractérise le stockage d'énergie dans les MCP. En effet, la transition solide-liquide ou liquide-solide se manifeste dans des intervalles de températures relativement étroits. Une telle caractéristique assure un stockage et une restitution de l'énergie à une température quasiment constante et contribue ainsi à la réduction des pertes thermiques vers l'environnement dont est exposé le système de stockage d'énergie.

Le stockage d'énergie thermique avec les matériaux à changement de phase a fait l'objet de plusieurs études de recherche dans les deux dernières décennies. Zalba et al. [1] ont mené une étude bibliographique sur les différents travaux de recherche relatifs à l'application des MCPs pour le stockage d'énergie thermique. Agyenim et al. [2] ont fait une étude sur la formulation du problème de transfert de chaleur par changement de phase pour les systèmes de stockage d'énergie thermique par chaleur latente. Trp [3] a étudié expérimentalement les performances thermiques d'une unité de stockage d'énergie thermique par chaleur latente de fusion d'une unité constitué de deux tubes concentriques. Akgun et al. [4,5] ont étudié les caractéristiques de fusion/solidification d'un MCP (la paraffine) dans trois types de configurations d'un système de stockage d'énergie thermique formé par deux tubes concentriques. Une nouvelle géométrie de stockage d'énergie thermique est introduite. Les effets du nombre de Reynolds et du nombre Stefan sur les processus de fusion et de solidification ont été examinés. Wang et al. [6] ont utilisé le nitrure β -Aluminium en tant qu'additif pour améliorer la conductivité thermique et les performances thermiques d'une forme stable des MCP composites. Medrano et al. [7] ont évalué expérimentalement les performances d'un échangeur de chaleur commercial utilisé

comme système de stockage thermique par des MCPs. En faisant appel à la méthode des élément finis, Gong et Mujumdar [8] ont analysé numériquement le transfert de chaleur cyclique d'un matériau à changement de phase de sel fondu dans un échangeur d'énergie thermique constitué de deux tubes concentriques. Trp et *al*. [9] ont présenté un modèle mathématique pour étudier un problème conjugué de convection forcé transitoire et de transfert de chaleur par changement de phase solide-liquide basé sur la formulation enthalpique. Fang et Chen [10] ont étudié l'effet d'utilisation de multiples MCPs sur la fraction liquide, la capacité de stockage de chaleur et la température de sortie du fluide caloporteur dans un système de stockage formé de deux tubes concentriques. Zhang [11] a mené des investigations numériques d'un nouveau système de stockage d'énergie thermique par chaleur latente utilisant un MCP ayant une température de fusion relativement élevée. Il a étudié l'effet des paramètres de géométrie et des conditions aux limites sur la performance thermique du système de stockage. El Qarnia [12] a développé un modèle théorique pour prédire la performance thermique d'un système solaire de stockage d'énergie thermique par chaleur latente de fusion. Adine et El Qarnia [13] ont analysé numériquement le comportement thermique d'une unité de stockage d'énergie thermique constitué de deux tubes concentriques. L'espace annulaire est rempli de deux MCPs alors que dans le tube intérieur un fluide caloporteur circule.

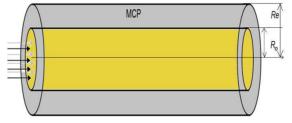
Dans les travaux précités relatifs aux unités de stockage d'énergie formé par deux tubes concentriques, le fluide est en écoulement stationnaire. Dans le présent travail, les auteurs étudient numériquement la performance d'une unité de stockage formé de deux tubes concentriques où l'écoulement du fluide caloporteur dans le tube intérieure est pulsé.

2. Modèle physique et formulation mathématique

2.1 Modèle physique

Le modèle physique étudié est représenté sur la figure 1. Il s'agit de deux tubes concentriques confinant dans leur espace annulaire un MCP chauffé par l'eau en écoulement pulsé et circulant dans le tube intérieur. L'écoulement pulsé est causé par un gradient de pression variant sinusoïdalement en fonction du temps. Les

propriétés thermpophysiques de sont données dans les tableaux 1 l'eau et du MCP et 2, respectivement.



 $\frac{\partial P^*}{\partial x^*} = -(A_o + A_1 \cos(\omega t^*)$

rigure 1. schema un mouele physique etudie



Tableu 1 : Propriétés thermophysiques de l'eau

Propriétés thermophysiques	T_{fe} - T_{m} \leq 10	$10 < T_{fe} - T_{m} < 20$	$T_{\text{fe}}\text{-}T_{\text{m}} \ge 20$
k _f (W/m k)	0,62	0,628	0,64
$\rho_{\rm f}~({\rm kg/m^3})$	995,0	993,0	989,0
$c_{p,f}$ (J/kg K)	4178,0	4178,0	4180,0
$\mu_f \times 10^6 (\text{kg/m s})$	769,0	695,0	577,0
Pr	5,2	4,62	3,77

Tableu 2 : Propriétés thermophysiques du MCP (n-octadecane)

T _m (K)	$\begin{array}{c} \rho_m \\ (kg/m^3) \end{array}$	c _{p,m} (J/kg K)	Δh (kJ/kg)	$v_m \times 10^6$ (m/s^2)	k _{m,1} (W/m k)	k _{m,s} (W/m k)
300,7	771,0	2222,0	243,5	4,0	0,14	0,358

2.2 Formulation

Pour simplifier le problème, on adopte les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Les propriétés thermo physiques du MCP et du fluide circulant à l'intérieur du tube sont indépendantes de la température. Mais elles peuvent être différentes pour les phases solide et liquide du MCP;
- Le MCP est supposé homogène et isotrope;
- Le fluide est supposé incompressible et Newtonien ;
- L'écoulement est supposé laminaire et établi dynamiquement ;
- La conduction longitudinale et la dissipation visqueuse dans le fluide sont négligeables ;
- Les mouvements convectifs naturels, dus à la poussée d'Archimède, dans la phase liquide du MCP sont pris en compte par l'utilisation d'une conductivité thermique effective donnée par la corrélation [15] : k_e/k_{m,l} = C Raⁿ (C et n sont des constantes);
- Les champs de température instantanés du MCP et du fluide sont indépendants de la direction ortho-radiale. Ils ne dépendent que des directions radiale et longitudinale ;
- Les pertes thermiques vers le milieu ambiant sont négligeables ;
- La paroi du tube intérieur est supposée mince et le matériau qui la constitue est supposé un bon conducteur thermique.
- Equation de la quantité de mouvement du fluide caloporteur

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = (8 + \beta \cos(\Omega \mathbf{t})) + \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) \tag{1}$$

- Equation d'énergie du fluide caloporte

$$\frac{\partial \theta_{\rm f}}{\partial t} + \frac{R_{\rm ey}}{2} u \frac{\partial \theta_{\rm f}}{\partial x} = \frac{1}{P r_{\rm f}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{\rm f}}{\partial r} \right) \right) \tag{2}$$

Où $\theta_f = (T_f - T_m)/(T_{fe} - T_m), x = x^*/R_0,$

- Equation d'énergie du MCP

$$\begin{split} \frac{\partial \theta_{m}}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\overline{\alpha_{m}}}{Pr} \frac{\partial \theta_{m}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{\alpha_{m}}}{Pr} \frac{\partial \theta_{m}}{\partial x} \right) - \frac{1}{Ste} \frac{\partial f}{\partial t} \\ O\grave{u} : u = u^{*}/u_{m}, \quad \theta = (T - T_{m})/\left(T_{fe} - T_{m} \right), \quad t = t^{*} \nu_{f}/R_{0}^{2}, \quad r = r^{*}/R_{0}, \\ \beta = 8A_{1}/A_{0}, \quad \Omega = \omega R_{0}^{2}/\nu_{f}, \quad R_{ey} = 2u_{m}R0/\nu_{f}, \quad Pr = \nu_{f}/\alpha_{f}, \quad Ste = c_{p,m}(T_{fe} - T_{m}), \end{split}$$

$$\beta = 8A_1/A_0, \qquad \Omega = \omega R_0^2/\nu_f , \qquad R_{ey} = 2u_m R_0/\nu_f , \qquad Pr = \nu_f/\alpha_f , \qquad Ste = c_{p,m}(T_{fe} - T_m), \qquad \overline{\alpha}_m = 0$$

f et la fraction liquide qui est estimée comme suit :

L'équation (3) est formulée en utilisant la méthode enthalpique où l'enthalpie totale est donnée par l'expression suivante :

$$H(T) = h_{m}(T) + \rho_{m} f \Delta h$$
 (5)

avec

$$h(T) = \int_{T_{m}}^{T} \rho_{m} c_{p,m} dT$$
 (6)

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\theta_{f}(x, r, t=0)=1, \tag{7a}$$

$$\theta(x, r, t=0)=0. \tag{7b}$$

Les conditions aux limites sont données comme suit :

$$r = 0$$
, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = 0$ (8a)

$$r = 1 , \quad \mathbf{u} = 0 \tag{8b}$$

$$r = 1$$
, $u = 0$ (8b)
 $r = 0$, $\frac{\partial \theta_f}{\partial r} = 0$ (9a)

$$r = 1, \quad \frac{\partial \theta_f}{\partial r} = \bar{k}_m \frac{\partial \theta_m}{\partial r}$$
 (9b)

$$x = 0, \quad \theta_f = 1$$
 (9c)

$$r = R_e/R_0, \quad \frac{\partial \theta_m}{\partial r} = 0$$
 (10a)

$$r = 1, \quad \bar{k}_{m} \frac{\partial \theta_{m}}{\partial r} = \frac{\partial \theta_{f}}{\partial r}$$
 (10b)

$$x = 0, \qquad \frac{\partial \theta_{m}}{\partial x} = 0$$

$$x = L/R_{0}, \quad \frac{\partial \theta_{m}}{\partial x} = 0$$
(10c)
(10d)

$$x = L/R_0, \quad \frac{\partial \theta_m}{\partial x} = 0 \tag{10d}$$

La conductivité thermique, k_{m} , dépend de l'état du MCP (solide ou liquide). Elle est calculée par la relation :

$$k_{m} = f_{1}k_{e} + (1 - f_{1})k_{s}$$
(11)

2.3 Profil de vitesse

La vitesse adimensionnelle peut être écrite sous la forme suivante :

$$u(r,t) = \frac{u^*}{u_m} = u_0(r) + u_1(r,t)$$
 (12)

Où u₀ est la vitesse d'écoulement stationnaire et u₁ est la composante transitoire de la vitesse. En substituant l'équation (12) dans l'équation (1), on obtient la distribution de vitesse comme suit :

$$u_0(r) = 2(1 - r^2) \tag{13}$$

$$u_{1}(r,t) = r\acute{e}el(\frac{-i\beta}{\Omega}(1 - \frac{J_{0}(\sqrt{-i\Omega}r)}{J_{0}(\sqrt{-i\Omega})}e^{i\Omega t}))$$
 (14)

Où J₀ est la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre zéro.

3. Etude paramétrique

Le fluide caloporteur et le MCP choisis sont respectivement la n-octadécane et l'eau. Leurs propriétés thermophysiques respectives sont données dans les tableaux 1 et 2. La température de l'eau à l'entrée du tube intérieur vaut 45 °C. Les paramètres β , Pr, Ste, et θ_{fe} sont respectivement égaux aux 2; 4,62; 0,16; et 1. Les paramètres L/R_o et R_e/R_o sont égaux aux 157,5 et 2.

3.1 Effets de la fréquence adimensionnelle et du nombre de Reynolds sur le flux de chaleur adimensionnel

L'effet de la fréquence adimensionnelle sur le flux de chaleur adimensionnel transmis par le fluide caloporteur au MCP est illustré sur les figures 2a, 2b et 2c pour $R_{ev} = 500$, 1000 et 2000, respectivement, et β =2. Comme on peut le constater, les oscillations du flux de chaleur adimensionnel deviennent de plus en plus prononcées que la fréquence adimensionnelle est élevée. Au début du stockage, le flux de chaleur adimensionnel est le même pour toutes les fréquences adimensionnelles. Durant cette période, le flux de chaleur adimensionnel subit un accroissement rapide et atteint son maximum. Cette valeur maximale est d'autant plus élevée que la fréquence adimensionnelle est faible. Cependant, pour l'amplitude adimensionnelle choisie (β = 2), ces maximas sont proches l'un de l'autre. Après avoir atteint son maximum, le flux de chaleur adimensionnel décroit et manifeste des oscillations au cours du temps. Les extremums atteints décroissent avec le temps. Il est à noter que vers la fin du processus de fusion, le flux de chaleur adimensionnel décroit rapidement, devient insensible à la variation de la fréquence adimensionnelle et finit par s'annuler lorsque l'équilibre thermique est atteint (à la fin du stockage thermique).

L'analyse des résultats des figures 2a, 2b et 2c montre que la valeur maximale du flux de chaleur adimensionnel est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est important. Cela peut être expliqué par le fait que le transfert de chaleur est plus intense pour les nombres de Reynolds élevés. Il faut noter que l'aire de la surface délimitée par la courbe du flux de chaleur adimensionnel et les deux axes d'ordonnée et d'abscisse est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est élevé. L'aire de cette surface traduit la quantité de chaleur transmise par le fluide caloporteur au MCP. Ceci explique bien la fusion relativement rapide pour les nombres de Reynolds élevés. Un autre résultat ressort de l'analyse des figures 2a, 2b et 2c : les oscillations du flux de chaleur adimensionnel s'affaiblissent avec l'augmentation du nombre de Reynolds et s'atténuent vers la fin du processus de stockage.

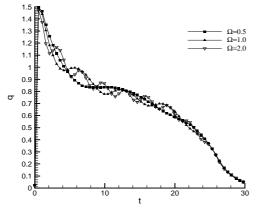


Figure 2a : Effet de la fréquence adimensionnelle sur l'évolution temporelle du flux de chaleur adimensionnel pour $R_{\rm ey}\!=\!500$

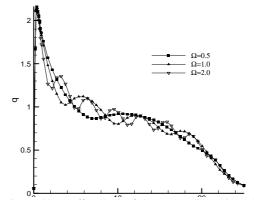


Figure 2b : Effet de la fréquence adimensionnelle sur l'évolution temporelle du flux de chaleur adimensionnel pour $R_{\rm ey}\!=\!1000$

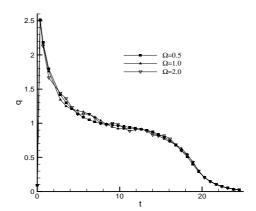
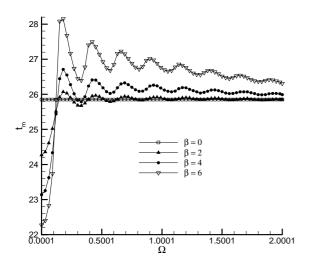


Figure 2c: Effet de la fréquence adimensionnelle sur l'évolution temporelle du flux de chaleur adimensionnel pour $R_{\rm ey}\!=\!2000$

3.2 Effets de la fréquence adimensionnelle sur la durée de fusion totale

L'effet de la fréquence adimensionnelle sur la durée de fusion adimensionnelle est donné aux figures 4a et 4b. La durée de fusion adimensionnelle est présentée en fonction de la fréquence adimensionnelle pour différentes amplitudes adimensionnelles d'oscillation ($\beta=0$; 2; 4; 6) et pour les nombre de Reynolds $R_{ey}=500$ et $R_{ey}=10^3$. Dans le but de pouvoir comparer la performance thermique de l'unité de stockage thermique chargée par un fluide en écoulement pulsé à celle correspondant à un écoulement permanent, la durée de fusion adimensionnelle associée à un écoulement permanent est aussi présentée ($\beta=0$). Il ressort l'analyse de ces figures que la durée de fusion adimensionnelle a un comportement oscillatoire. Elle prend sa valeur minimale pour une fréquence adimensionnelle très faible ($\Omega\rightarrow0$). Cette valeur est d'autant plus faible que l'amplitude adimensionnelle β est élevée. Lorsque la fréquence adimensionnelle augmente, la durée de fusion s'accroit et atteint sa valeur maximale. Cette valeur est d'autant plus élevée que l'amplitude adimensionnelle β est grande. Au fur et à mesure que la fréquence adimensionnelle Ω augmente, la durée de fusion oscille. Les extrémums atteints décroissent au cours du temps. Il en est de même pour l'écart entres les valeurs maximale et minimale. Ainsi, l'amplitude des oscillations diminue, et la valeur de la durée de

fusion tend vers celle correspondant à un écoulement non pulsé (β=0), quelque soit la valeur du nombre de Reynolds.



22 _E 21 20.5 20 19.5 0.0001 0.5001 1.5001 2.0001 1.0001

Figure 3a : Effet de la fréquence adimensionnelle sur la durée de fusion totale du MCP pour R_{ev}=500

Figure 4b : Effet de la fréquence adimensionnelle sur la durée de fusion totale du MCP pour R_{ev}=1000

Conclusion

Un modèle mathématique basé sur les équations de conservation d'énergie a été développé pour simuler le comportement thermique et la performance thermique d'un élément de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion. Les résultats de simulations montrent l'importance que présente un écoulement pulsé par rapport à un écoulement de Poiseuille, pour favoriser la fusion du matériau à changement de phase pour certaines conditions satisfaites par la fréquence et l'amplitude adimensionnelles de l'écoulement pulsé. Les investigations numériques menées ont permis de dégager les résultats suivants :

- Pour une amplitude adimensionnelle relativement élevée et une fréquence adimensionnelle faible $(\Omega \rightarrow 0)$, l'utilisation d'un fluide caloporteur en écoulement pulsé est favorable pour le stockage
- Un nombre de Reynolds élevé est favorable pour le transfert de chaleur et contribue à la réduction de la durée de fusion du MCP pour les faibles valeurs de la fréquence adimensionnelle et les valeurs élevées de l'amplitude adimensionnelle.
- Pour une fréquence adimensionnelle très élevée, l'utilisation d'un fluide caloporteur en écoulement pulsé au lieu d'un fluide en écoulement de Poiseuille est sans utilité.

Nomenclature

A₀: gradient de pression moyen (Pa/m)

A₁: amplitude d'oscillation du gradient de pression

(Pa/m)

h : enthalpie volumique (J.m⁻³)

J₀: fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0

Pr: nombre de Prandtl q : densité de flux

R₀: Rayon du tube intérieur (m)

R_e: rayon du tube extérieur (m)

Ra : nombre de Rayleigh $(g\beta(T_w\text{-}T_{\text{fus}})(R_e\text{-}R_0)^3\alpha_{m,l}\text{-}^l\nu_{m,l}\text{-}^l)$

t: temps adimensionnel

T: température (K)

 R_{ey} : nombre de Reynolds ($\frac{2\,R_{_0}u_{_m}}{\nu_{_f}}$)

 θ : température adimensionnelle $(T-T_{fus})/(T_{fe}-T_{fus})$

β: amplitude adimensionnelle d'oscillation

 α : diffusivité thermique (m²/s)

Δh: chaleur latente de fusion (J/kg)

μ : viscosité dynamique (kg m⁻¹s⁻¹)

v: viscosité cinématique (m²/s)

 ρ : densité (kg/m³)

ω: fréquence (Hz)

 Ω : fréquence adimensionnelle

Indices

f: fluide

1: liquide

m: fusion, MCP ou moyenne

s : solide w: paroi e : entrée o : pas de temps précédent

*: variables dimensionnelles (utilisé pour r, x, t, u, q)

Références

- [1] B. Zalba, J.M. Marin, L.F. Cabeza, H. Mehling, Review on thermal energy storage with phase change: materials heat transfer analysis and application, Appl. Therm. Eng. 23 (2003) 251-283.
- [2 F. Agyenim, N. Hewitt, P. Eames, M. Smyth, A review of materials, heat transfer and phase change problem formulation for latent heat thermal energy storage systems, Renew. Sustain. Energy Rev. 14 (2010) 615-628.
- [3] A. Trp, An experimental and numerical investigation of heat transfer during technical grade paraffin melting and solidification in a shell-and-tube latent thermal energy storage unit, Sol. Energy 79 (2005) 648-660.
- [4] M. Akgun, O. Aydin, K. Kaygusuz, Experimental study on melting/solidification characteristics of a paraffin as PCM, Energy Convers. Manag. 48 (2007) 669-678.
- [5] M. Akgun, O. Aydin, K. Kaygusuz, Thermal energy storage performance of paraffin in a novel tube-in-shell system, Appl. Therm. Eng. 28 (2008) 405-413.
- [6] W. Wang, X. Yang, Y. Fang, J. Ding, J. Yan, Enhanced thermal conductivity and thermal performance of form-stable composite phase change materials by using b-aluminum nitride, Appl. Energy 86 (2009) 1196-1200.
- [7] M. Medrano, M.O. Yilmza, M. Nogues, I. Martorell, J. Roca, L.F. Cabeza, Experimental evaluation of commercial heat exchangers for use as PCM thermal storage systems, Appl. Energy 86 (2009) 2047-2055.
- [8] Z.X. Gong, A.S. Mujumdar, Finite-element analysis of cyclic heat transfer in a shell-and-tube latent heat energy storage exchanger, Appl. Therm. Eng. 17 (1997) 583-591.
- [9] A. Trp, K. Lenic, B. Frankovic, Analysis of the influence of operating condition and geometric parameters on heat transfer in watereparaffin shell-and-tube latent thermal energy storage unit, Appl. Therm. Eng. 26 (2006) 1830-1839.
- [10] M. Fang, G.M. Chen, Effects of different multiple PCMs on the performance of a latent thermal energy storage system, Appl. Therm. Eng. 27 (2007) 994-1000.
- [11] C.X. Guo, W.J. Zhang, Numerical simulation and parametric study on new type of high temperature latent heat thermal energy storage system, Energy Convers. Manag. 49 (2008) 919-927.
- [12] H. El Qarnia, Numerical analysis of a coupled solar collector latent heat storage unit using various phase change materials for heating the water, Energy Convers. Manag. 50 (2009) 247-254.
- [13] H.A. Adine, H. El Qarnia, Numerical analysis of the thermal behaviour of a shell-and-tube heat storage unit using phase change materials, Appl. Math. Model. 33 (2009) 2134-2144.
- [14] V.R. Voller, Fast implicit finite-difference method for the analysis of phase change problems, Numer. Heat Transf. 17 (1990) 155-169.