



Analyse des écoulements pulsés dans un tube cylindrique

Manel Oueslati, Ridha Abid.

Résumé : Une étude analytique d'un écoulement laminaire pulsé établi d'un fluide incompressible dans un tube cylindrique a été effectuée à l'aide du logiciel Matlab. L'écoulement pulsé est généré en imposant un débit qui varie sinusoidalement avec le temps. La réponse de l'écoulement laminaire soumis aux pulsations imposées a été analysée en fonction de l'amplitude des oscillations et de la fréquence. La variation des paramètres des pulsations (amplitude et fréquence) a permis de distinguer trois régimes d'écoulement : régime quasi-stationnaire, régime intermédiaire et régime inertiel. Dans ce travail, on présente les résultats de l'étude de la structure de l'écoulement laminaire pulsé établi dans les trois régimes d'écoulement.

Mots clés : Ecoulement pulsé – Conduite – Transfert thermique.

1. Introduction

L'étude des écoulements pulsés présente un intérêt majeur par ses applications industrielles, biomédicales énergétiques et environnementales. Comme exemples d'écoulements, on peut citer les écoulements pulsés dans les turbomachines; dans les convertisseurs d'énergie (machine sterling, tube à gaz pulsé) et dans le sang. Les modèles actuels de prévision ne sont pas satisfaisants. En effet, ils utilisent des lois de transfert établies en écoulements permanents (loi de perte de charge, modèle de turbulence..). Il est donc nécessaire d'acquérir une meilleure compréhension de la physique des écoulements pulsés. Richard et Tyler (1) sont les premiers à avoir étudié un écoulement oscillant dans une conduite. Ils ont mis en évidence l'effet annulaire. Sexl (2) a donné une explication théorique de ce phénomène. Womersley (3), Uchida(4), Atabek et Chang(5), et Chen et Griffen(6) ont obtenu analytiquement les solutions de la composante oscillante pour un écoulement laminaire d'un fluide visqueux et incompressible dans une conduite cylindrique soumis à un gradient de pression pulsé. Ohmi et al. (7) ont effectué plusieurs travaux théoriques et expérimentales sur l'écoulement laminaire. Ray et al. (8), Haddad et al. (9) ont développé une solution analytique pour le profil de vitesse en écoulement pulsé établi dans un tube cylindrique et un canal plan. ils ont généré l'écoulement pulsé en imposant une vitesse débitante pulsée à l'entrée du tube. Ils ont obtenu des expressions analytiques des grandeurs physiques: vitesse, gradient de pression et contrainte pariétale de cisaillement. Ray et al.. (10) ont étudié numériquement le développement de l'écoulement laminaire pulsé dans le but de déterminer la longueur d'établissement de l'écoulement pulsé. Dans ce travail, une analyse physique des écoulements pulsés dans un tube est conduite. L'objectif est d'acquérir une meilleure compréhension de la physique des écoulements pulsés et de développer des corrélations qui tiennent compte de l'instantanéité.

2. Formulation mathématique du modèle

2.1. Problème physique

Dans le présent travail, on se propose de conduire une analyse physique de la structure d'un écoulement laminaire isotherme pulsé établi d'un fluide incompressible et visqueux de masse volumique ρ et de viscosité cinématique μ . Le modèle physique choisi est un tube cylindrique horizontal de rayon R , de longueur infinie et de section constante. L'écoulement pulsé est généré en imposant un débit axial qui varie sinusoidalement avec le temps :

$$Q = Q_0 + Q_t \sin(\omega t) = Q_0(1 + Aq \cdot \sin(\omega t)) \quad (1)$$

Avec $\omega = 2\pi f$ la fréquence circulaire, f la fréquence, Q_0 la composante stationnaire du débit, Q_t la composante oscillante du débit et Aq l'amplitude relative des pulsations forcées.

2.2. Equations du modèle

En régime pulsé établi, le vecteur vitesse est donné par $\vec{v}(\mathbf{M}, t) = u(r, t) \vec{e}_x$ vérifié l'équation de continuité. Compte tenu des hypothèses énoncées précédemment, les équations de la continuité et de la quantité mouvement se simplifient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad p = p(x, t) \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \quad (4)$$

Le premier terme à gauche de l'équation (4) représente la force d'inertie, le premier terme à droite de l'équation (4) représente la résultante des forces de pression, le dernier terme de l'équation (4) représente la résultante des forces de viscosité

2.3. Formulation adimensionnelle

Pour mettre l'équation du modèle sous forme adimensionnelle, on utilise les échelles caractéristiques comme grandeurs de référence : longueur de référence $L_r = R$, la vitesse de référence u_m (vitesse moyenne), temps de référence $t_r = 1/f$, pression de référence $p_r = \rho u_m^2$. Les variations adimensionnelles sont :

$$x^* = \frac{x}{R}, r^* = \frac{r}{R}, u^* = \frac{u}{u_m}, p^* = \frac{p}{\rho u_m^2}, t^* = f \cdot t \quad (5)$$

L'équation (4) du modèle sous sa forme adimensionnelle devient :

$$F \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{Re}{2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (6)$$

Où $Re = \frac{2 \cdot u_m R}{\nu}$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement ($\nu = \mu/\rho$ est la viscosité dynamique)

$F = \frac{R^2 f}{\nu}$ est le nombre adimensionnel de la fréquence. Notons que $F = \frac{\alpha^2}{2\pi}$ où $\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ est le nombre de Womersley.

Ainsi, la dynamique de l'écoulement laminaire pulsé établi d'un fluide incompressible est contrôlée par trois paramètres adimensionnels : Re , F , Aq . Ainsi, la solution générale de l'écoulement pulsé établi peut se mettre sous la forme :

$$u^* = u^*(r^*, t^*, \text{Re}, F, Aq)$$

$$p^* = p^*(x^*, t^*, \text{Re}, F, Aq)$$

Hadded et al[9] ont introduit une échelle de temps $t_r = R^2/\nu$ et une autre échelle de la pression

$\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)_s$, une autre forme adimensionnelle de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)^* + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*}\right) \quad (7)$$

Avec

$$\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} / \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)_s$$

Notons la vitesse moyenne u_m et le gradient de pression en régime stationnaire sont liés par la relation de

$$\text{Poiseuille} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)_s = \frac{8\nu u_m}{R^2}.$$

Dans la suite, on utilise l'équation adimensionnelle (7) (sans les symboles *) pour obtenir les solutions analytiques.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (8)$$

3. Solution analytiques

Les solutions analytiques sont obtenues en décomposant la vitesse u en une composante stationnaire u_s et une autre non stationnaire u_t ,

$$u(\mathbf{r}, t) = u_s(\mathbf{r}) + u_t(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

En tenant compte des relations (8) et (1), l'équation (9) devient :

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\partial p_t}{\partial x}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_s}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_t}{\partial r}\right) \quad (10)$$

La méthode de séparation des variables permet d'obtenir les équations suivantes :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_s}{\partial r}\right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \quad (12)$$

En tenant compte des conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r=0) = 0 \quad u(r=1) = 0 \quad (13)$$

On obtient les solutions suivantes [9] : (14)

$$u_s = 2(1-r^2)$$

$$u_t = \mathbf{R} \left\{ \frac{4A_p}{\pi F} \left[\frac{J_0(\sqrt{2\pi F} i^{3/2} r^*)}{J_0(\sqrt{2\pi F} i^{3/2})} - 1 \right] \exp(i(2\pi F \tau + \Delta\theta_q)) \right\} \quad (15)$$

D'où
$$u = 2(1-r^2) \left[1 + u_A \sin(2\pi F \tau + \Delta\theta_q - \Delta\theta_u) \right] \quad (13)$$

Le gradient de pression est donnée par :

$$\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 8 \left[1 + A_p \sin(2\pi F \tau + \Delta\theta_q) \right] \quad (14)$$

avec
$$A_p = \frac{A_q}{|\psi_q|} \quad \text{et} \quad \Delta\theta_q = \tan^{-1} \left(\frac{\Re(\psi_q)}{\Im(\psi_q)} \right) \quad (15)$$

la contrainte de frottement adimensionnelle à la paroi définie par :

$$\tau_w = 1 + \tau_{wA} \sin(2\pi F \tau + \Delta\theta_{\tau_w}) \quad (16)$$

4. Discussion des résultats

4.1. Réponse d'un écoulement laminaire aux pulsations

Les figures (1) et (2) montrent l'évolution temporelle du débit, du gradient de pression $-\partial p/\partial x$ et la contrainte pariétale de cisaillement τ_w pour les fréquences adimensionnelles $F = 0.03$ et 5 et une amplitude des oscillations $Aq = 0.8$.

Les réponses fréquentielles des grandeurs physique $-\partial p/\partial x$ et τ_w en amplitude et en déphasage sont présentées sur les figures (3) et (4). On constate que le déphasage augmente avec la fréquence F et tend à atteindre une valeur maximale de 90° pour le gradient de pression et de 40° pour la contrainte de cisaillement pariétale. De plus, l'accroissement de la fréquence F entraîne une diminution de l'amplitude de la composante oscillante de ces grandeurs physiques.

Ces résultats expliquent par l'augmentation de l'effet de la force d'inertie avec F dans la dynamique d'un écoulement pulsé établie contrôlée par l'équilibre des 3 forces : les forces de la pression et de la viscosité et la force d'inertie.

Ainsi, la réponse de l'écoulement laminaire aux pulsations imposées du débit nous permet de distinguer trois régimes d'écoulements :

- Le régime quasi-stationnaire ($F < 0.5$)
- Le régime intermédiaire ($0.5 < F < 50$)
- Le régime inertiel ($F > 50$)

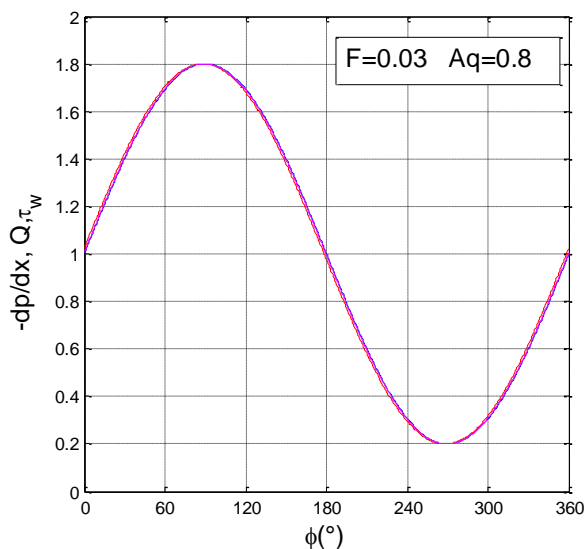


Figure 1 : Evolution temporelle du débit entrant, du gradient de pression et de contrainte pariétale de cisaillement pour $F=0.03$

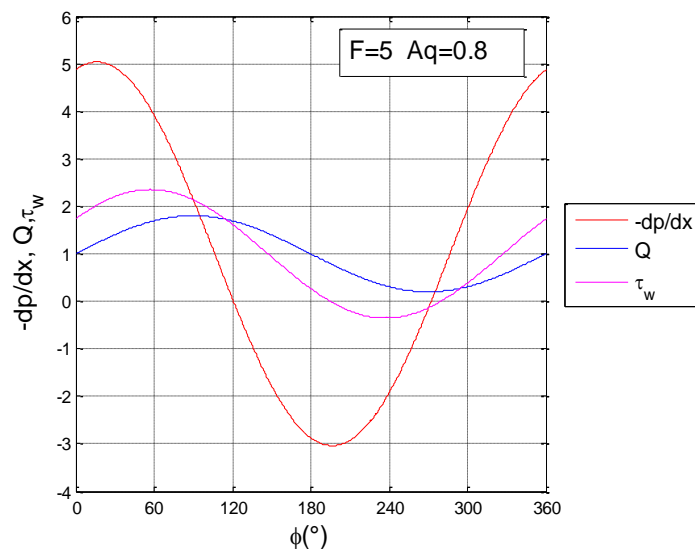


Figure 2 : Evolution temporelle du débit entrant, du gradient de pression et de contrainte pariétale de cisaillement pour $F=5$

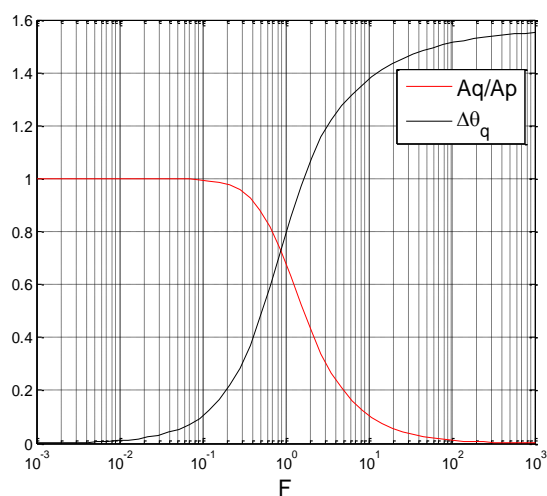


Figure 3 : Evolution fréquentielle de Aq/AP et $\Delta\theta_q$

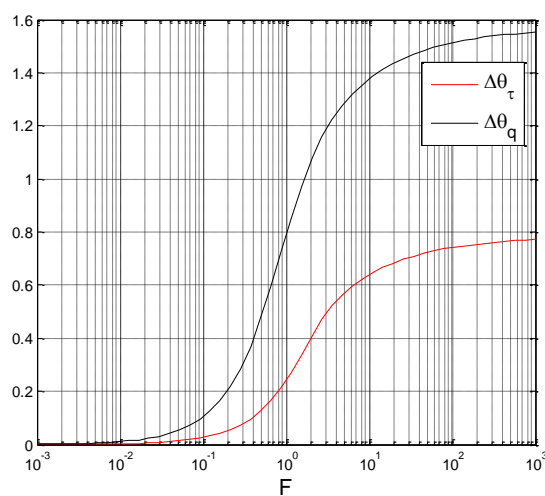


Figure 4 : Evolution fréquentielle de $\Delta\theta_q$ et $\Delta\theta_\tau$

4.2. Régime quasi-stationnaire

Le profil de la vitesse axiale pour la fréquence adimensionnelle $F = 0.03$ et une amplitude $Aq = 0.8$ est présenté sur la figure(5).

On constate que ces profils de la vitesse sont paraboliques et similaires à ceux de l'écoulement de Poiseuille pour toutes les phases de l'écoulement cependant, le maximum de la vitesse dépend fortement de l'amplitude des pulsations (voir Figure6).

L'explication de ces résultats est que la force d'inertie est faible par rapport aux forces de pression et de viscosité pour les basses fréquences (voir Equation 6). Dans ce cas, la solution de l'équation (8) se simplifie

$$u(r, t) = \left(2 + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \sin \theta \right) (1 - r^2)$$

Ainsi, toutes les grandeurs physiques répondent instantanément aux pulsations imposées. Cela se traduit par la validité de la loi de Poiseuille aux basses fréquences $\Delta P = R_H Q$

(R_H est la résistance hydraulique)

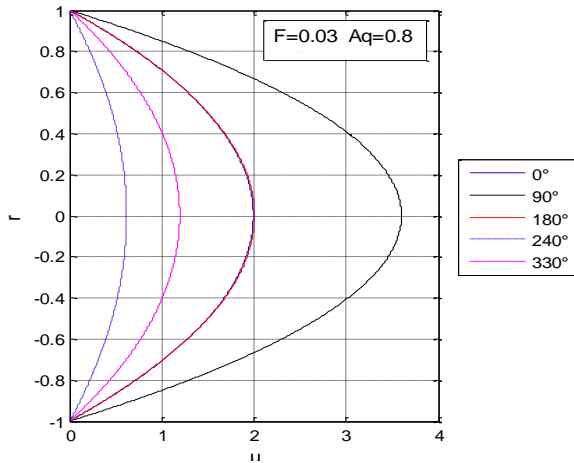


Figure5 : Profil de la vitesse axiale

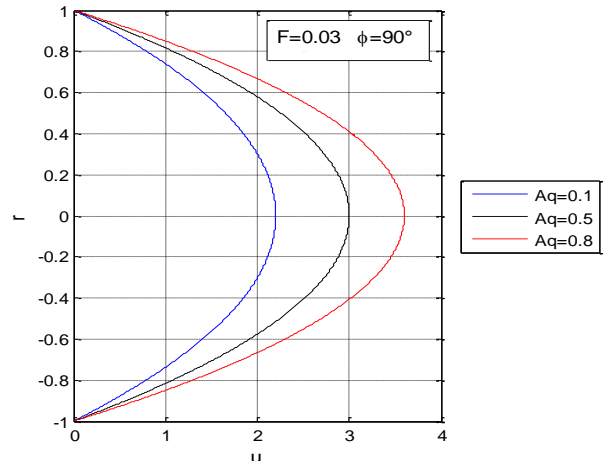


Figure6 : Profil de la vitesse axiale

4.3. Régime intermédiaire

Pour les fréquences intermédiaires, les grandeurs physiques (le gradient de pression, la vitesse et la contrainte pariétale) sont en déphasage avec les pulsations imposées (voir Figure2).

Le dynamique de l'écoulement pulsé établi est contrôlée par l'équilibre des 3 forces de viscosité.

Les figures (7) et (8) montrent les profils de la vitesse axiale pour les fréquences adimensionnelles $F = 5$ et $F = 20$ et une amplitude de pulsation $Aq = 0.8$.

On remarque que l'augmentation de F engendre une déformation des profils de vitesse. De plus, on observe l'apparition d'un écoulement de retour près de la paroi durant la phase de décélération.

L'augmentation de l'amplitude Aq entraîne un accroissement de la pente de la vitesse près de la paroi (voir Figure9).

Les réponses fréquentielles de la vitesse en amplitude (Aq/A_u) et en déphasage ($\Delta\theta_u$), à plusieurs positions radiales sont présentées sur les figures (10) et (11). L'analyse de ces figures montre que les variations de l'amplitude de la vitesse u_A et le déphasage $\Delta\theta_u$ avec la fréquence F ne sont pas uniformes dans la direction radiale. En effet, l'amplitude de la vitesse u_A diminue avec F et le déphasage est négatif près du centre du tube ($0 < r < 0.5$). Tandis que l'amplitude de la vitesse u_A augmente avec F et le déphasage est positif près de la paroi du tube ($0.6 < r < 1$). Donc, l'écoulement près de la paroi répond plus rapidement qu'au centre, dû à l'importance des forces d'inertie au centre du tube.

On peut expliquer ces résultats en remarquant que le paramètre F est le rapport du temps de diffusion visqueuse ($\tau_v = R^2/\nu$) à travers la direction radiale et la période $T = 1/f$ de pulsation. De ce fait, pour, les forces de viscosité ne peuvent plus suivre les pulsations composées.

En d'autres termes, le transfert de quantité de mouvement dans le fluide est uniformément transmis par les forces de pression qui s'établissent instantanément.

Cependant, le transfert de cette quantité de mouvement dans la direction radiale vers la paroi par les forces de viscosité est lent. La disparité des échelles de temps des transferts de quantité de mouvement par les forces de pression et les forces de viscosité est la cause de l'apparition des déphasages entre les grandeurs physiques.

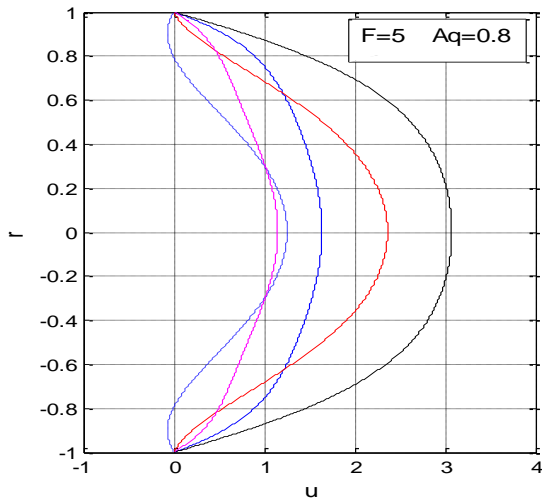


Figure7: Profil de la vitesse axiale

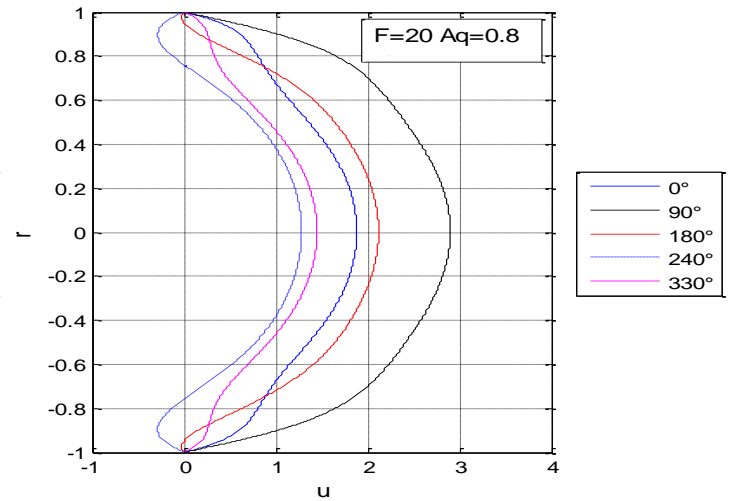


Figure8 : Profil de la vitesse axiale

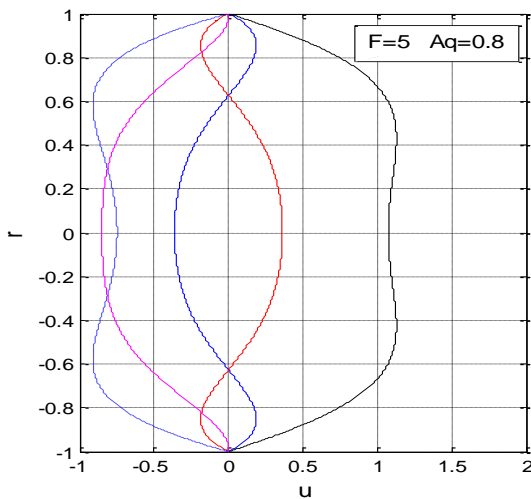


Figure9: Profil de la composante oscillatoire de la vitesse axiale

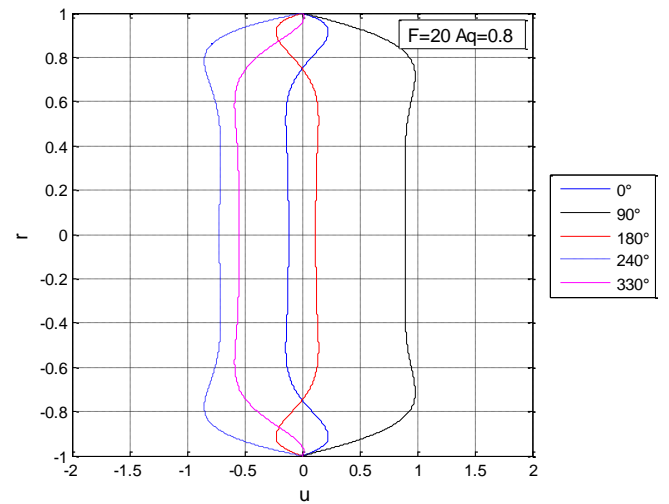


Figure10: Profil de la composante oscillatoire de la vitesse axiale

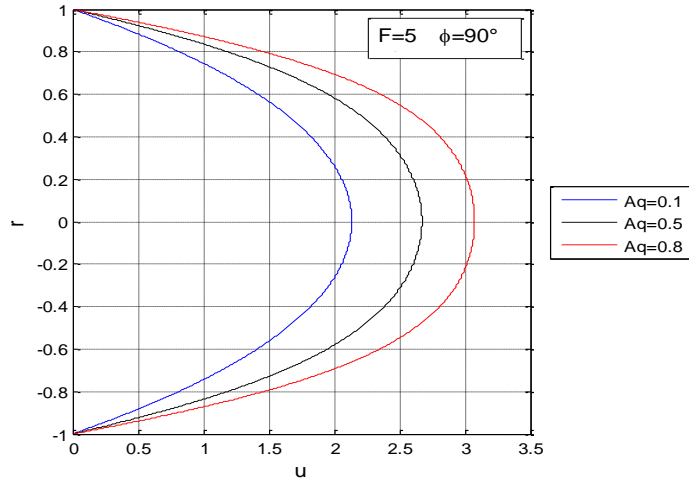


Figure11: Profil de la vitesse axiale

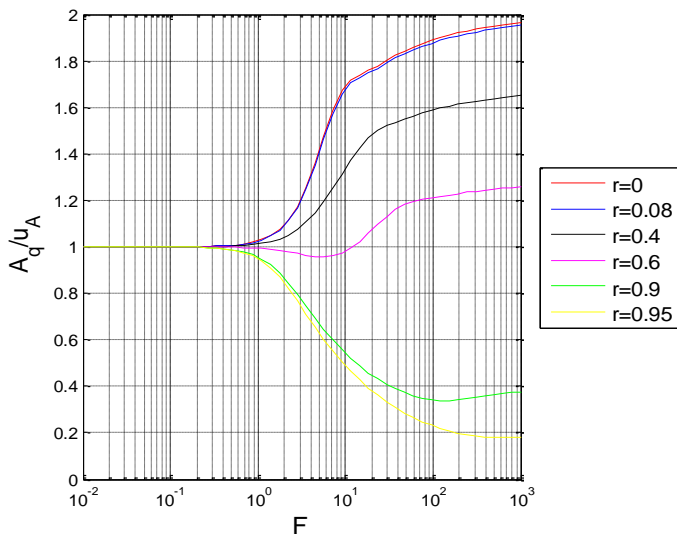


Figure12: Evolution fréquentielle de A_q/u_A

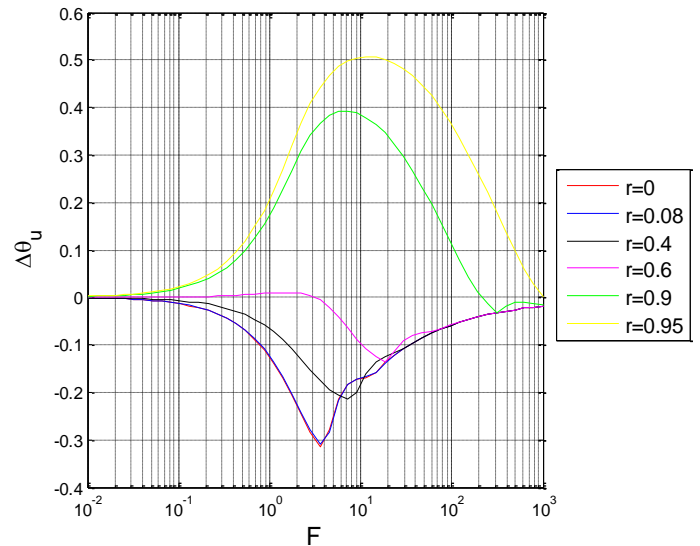


Figure13: Evolution fréquentielle de $\Delta\theta_u$

4.4. Régime inertiel

Dans ce régime, les effets d'inertie sont dominants $\tau_v \ll \tau_0$, le terme visqueux est négligeable dans l'équation de la quantité de mouvement (sauf dans une épaisseur faible près de la paroi). La dynamique de l'écoulement pulsé établi est contrôlée par les forces de pression et les forces d'inertie.

Les figures (14) et (15) montrent les profils de la vitesse axiale pour les fréquences adimensionnelles $F = 100$, $F = 300$ et une amplitude des pulsations $Aq = 0.8$. On constate un aplatissement de la vitesse qui varie très peu dans la direction radiale (sauf près de la paroi). De plus, elle atteint une valeur maximale près de la paroi (effet annulaire) dont la position varie au cours du cycle d'oscillations. D'autre part, les figures (3), (4) et (11) montrent que le déphasage entre la contrainte pariétale et le débit est de l'ordre de 45) tandis que celui

entre le gradient de pression et le débit est de l'ordre de 90). Ainsi, on a un écoulement oscillant en bloc du fluide (écoulement bouchon) avec une amplitude dépend de son inertie (sauf dans une zone très faible près de la paroi).

La figure (14) montre la variation temporelle de frottement pour quelques valeurs de la fréquence adimensionnelles F et une amplitude, on constate que la contrainte de cisaillement pariétale possède un comportement périodique dont son amplitude dépend fortement de F et de Aq . Les fortes valeurs de l'amplitude du coefficient C_f sont dues à l'augmentation des pentes de la vitesse à la paroi ($\frac{\partial u}{\partial r}$ à $r=1$).

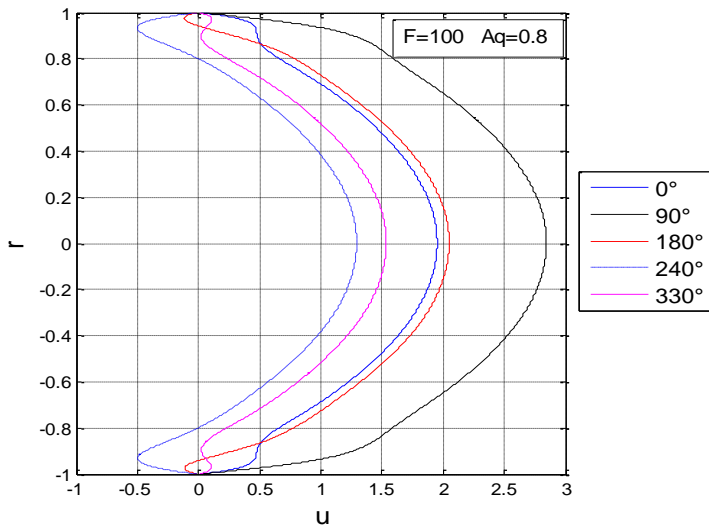


Figure14: Profil de la vitesse axiale

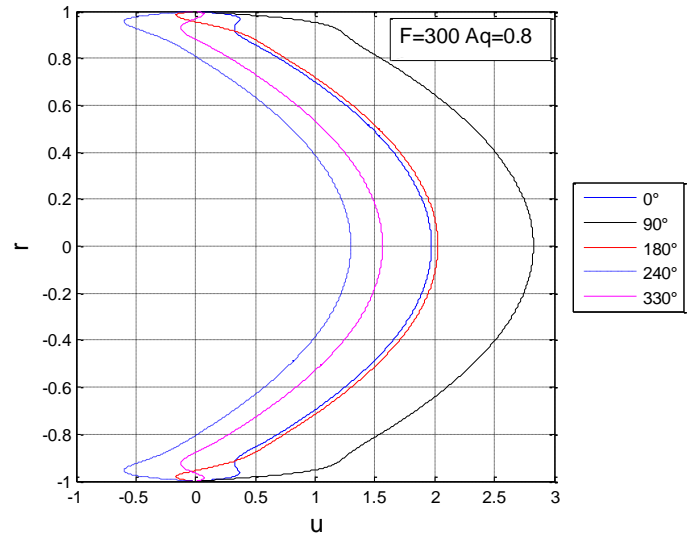


Figure15: Profil de la vitesse axiale

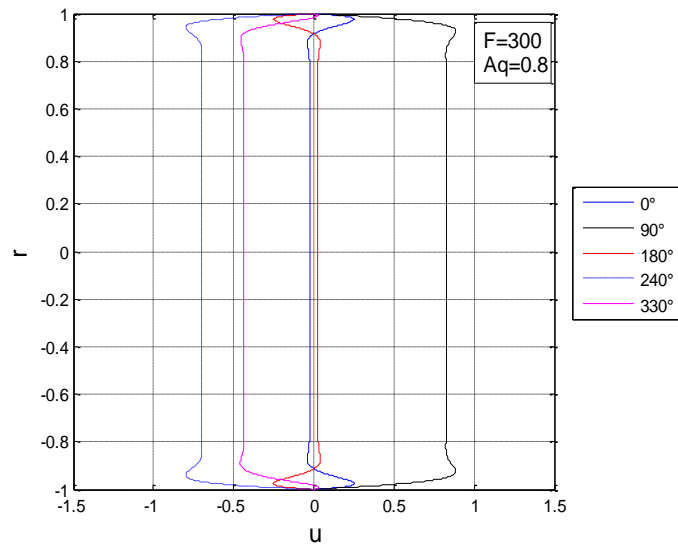


Figure16: Profil de la composante oscillatoire de la vitesse axiale

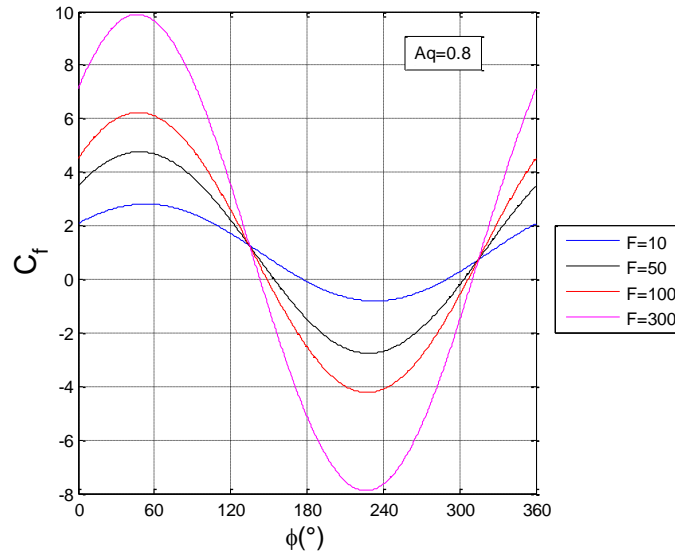


Figure17: Evolution temporelle du coefficient de frottement pour divers F

5. Conclusion

Une analyse des écoulements laminaires pulsés d'un fluide incompressible dans un tube cylindrique a été effectuée.

L'objectif du travail est d'étudier la structure de l'écoulement laminaire pulsé dans le tube.

La physique des écoulements laminaires pulsés est contrôlée par la fréquence adimensionnelle F qui est le rapport du temps de transfert de la quantité de mouvement dans la direction radiale ($\tau_v = R^2/\nu$) et la période des oscillations $T = 1/f$, et l'amplitude des oscillations A_q .

Cette étude nous a permis de distinguer trois régimes d'écoulement pulsés établis :

- Régime quasi-stationnaire ($F < 0.5$)

La force d'inertie étant faible devant les forces de pression et de viscosité. Toutes les grandeurs physiques sont en phase. La vitesse a un profil parabolique à chaque instant avec un maximum qui dépend de l'amplitude A_q .

- Régime intermédiaire ($0.5 < F < 50$)

La dynamique de l'écoulement pulsé établi est contrôlée par l'équilibre des 3 forces : la force d'inertie et les forces de pression et de viscosité.

L'effet de l'inertie introduit des déphasages entre les grandeurs physiques qui varient avec l'espace et le temps. Ce résultat est causé par le fait que le transfert de la quantité de mouvement par les forces de viscosité dans la direction radiale est lent.

- Régime inertiel ($F > 50$),

Dans ce régime, la dynamique des écoulements pulsés établis est contrôlée par l'équilibre des forces de pression et de la force d'inertie (sauf dans une épaisseur faible près de la paroi). L'écoulement pulsé est caractérisé par une oscillation en bloc du fluide avec un maximum de vitesse près de la paroi et des forts niveaux du coefficient de frottement.

Références

- [1] Richardson E.G. et Tyler "The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established, Proc. Phys. Soc(1927). Vol. 40,pp.206
- [2] Sexl T. Zeit,fur Physik (1930), Bd. 61, pp.349
- [3] Womersley J. R. J. Physiol (1955), Vol. 127,pp.553
- [4] Uchida. The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 7: 403-422, 1956
- [5] H.B.Atabek et C.C.Chang,"Oscillatory Flow near the entry of circular tube" , ZAMP, Vol 12,pp 185-201 (1961)
- [6] Jie-Cheng Yu,Zi-Xin Li, TS Zhao, "An analytical study of pulsating lamniar heat convective in a circular tube with constant heat flux (2004)
- [7] M. Ohmi, M. Iguchi, and I. Urahata. Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow. Bull. JSME, 25(202): 536-543, 1982b.
- [8] Ertunç, Ö., Ünsal, B., Ray, S., Durst, F., 2003. Application of a mass flow controller to time-dependent laminar and transitional pipe flows of the 740th Eurotherm Seminar, Proceedings, pp. 165–176.
- [9] Kais Haddad,ozgur Ertunc,Manorajan Mishra et ANtonio Delgado, "Pulsating laminar fully developed channel and pipe flows" , physical review E81 (2010)
- [10] Subhashis Ray, Bulent Unsal, Franz Durst , "Development length of sinusoidally pulsating laminar pipe flows in moderate and high Reynolds number regimes " , 37 (2012) 167-176