



## Étude de la convection naturelle tridimensionnelle en présence d'un champ magnétique externe et d'une source de chaleur interne

Farid BERRAHIL<sup>1</sup>, Smail BENISSAAD<sup>2</sup>

1. Centre Universitaire de Mila. Mila 43 000. Algérie.

2. Laboratoire d'Énergétique Appliquée et de Pollution. Département de Génie Mécanique. Faculté des Sciences de la Technologie. Université des Frères Mentouri – Constantine1. Route d'Ain El. Bey. Constantine 25000. Algérie.

E-mail : farid.berrahil@gmail.com; benissaad.smail@umc.edu.dz

**Résumé :** Dans ce travail, nous considérons le cas d'une cavité cubique, différentiellement chauffée par les parois latérales qui sont maintenues à des températures constantes. L'écoulement de la convection naturelle qui se développe dans cette configuration est sous l'influence d'un champ magnétique extérieur avec la présence d'une source de chaleur interne. Le phénomène physique tridimensionnel est modélisé par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les résultats issus des calculs tridimensionnels dans le cas stationnaire sont similaires au cas bidimensionnel. La différence est particulièrement nette lorsqu'on compare les résultats du cas instationnaire et l'écoulement a subi une bifurcation de Hopf. Le début des oscillations est caractérisé par le maintien de la symétrie des solutions par rapport au plan vertical. L'influence de la direction du champ magnétique a été étudiée pour deux orientations horizontal et vertical montrant que l'efficacité du champ horizontal est nettement supérieure au champ vertical.

**Mots clés :** Convection naturelle, champ magnétique, source de chaleur interne, bifurcation de Hopf.

### 1. Introduction

La convection naturelle dans les enceintes a suscité une attention considérable dans les dernières décennies et continuera à être un champ de recherches intéressant et fondamental. Cet intérêt est dicté pour ses diverses applications technologiques, telles que les systèmes d'énergie solaire, les systèmes de réacteur nucléaire, le refroidissement des composants électroniques et divers processus industriels. Ces dernières années, des études ont été menées sur les écoulements de la convection naturelle des fluides de faibles nombres de Prandtl en présence d'un champ magnétique. L'étude de ces écoulements dans les milieux confinés a un intérêt immense dans plusieurs applications industrielles. Parmi lesquelles, la conception des équipements thermiques pour le refroidissement et la régénération efficaces du tritium à partir du lithium liquide ( $Pr = 0.0321$ ) dans les réacteurs de plasma de type Tokamak [1] et la production des cristaux de bonne qualité [2].

L'étude de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) a fait l'objet de plusieurs travaux. Cependant, dans la majorité des cas, ces travaux se sont intéressés à la convection naturelle sans source de chaleur interne.

Benhadid et al. [3] ont mené des études analytiques et numériques sur la convection naturelle dans une configuration horizontale de Bridgman en incluant les effets de la surface libre. Ils se sont concentrés sur l'écoulement d'un métal liquide conducteur de l'électricité contenu dans une cavité rectangulaire ( $A = 4$ ) différentiellement chauffée soumise à un champ magnétique vertical constant. Une bonne concordance des solutions analytiques et numériques a été trouvée pour la vitesse horizontale dans la région centrale et pour les deux composantes de vitesse dans la région d'écoulement tournant près de la paroi verticale. Le seuil de l'instabilité oscillatoire de l'écoulement de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire ( $A = 4$ ) d'un fluide de faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.015$ ) sous l'action d'un champ magnétique uniforme externe a fait l'objet d'une étude réalisée par Gelfgat et al. [4]. Les diagrammes de stabilité obtenus indiquent la dépendance du nombre de Grashof critique avec le nombre de Hartmann. Ils ont constaté qu'un champ magnétique vertical fournit l'effet le plus fort de stabilisation, et aussi que la multiplicité des régimes stationnaires de l'écoulement est supprimée par l'effet électromagnétique, de sorte qu'à un certain niveau que seulement les structures monocellulaires restent stables. Bessaih et al. [5] ont présenté une étude numérique sur la convection naturelle oscillante pendant la solidification d'un métal liquide ( $Pr = 0.015$ ) contenu dans une cavité rectangulaire, ayant un allongement égal à 4 et soumise à un champ magnétique uniforme externe. La stabilisation la plus forte de l'écoulement de la convection a été trouvée quand le champ magnétique est orienté verticalement.

Yu et al. [6] ont étudié numériquement la convection naturelle stationnaire d'un fluide conducteur de l'électricité ( $Pr = 0.025$ ) dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée en présence d'un champ magnétique orienté par rapport au plan horizontal. Des simulations numériques sont réalisées sur une large gamme de nombres de Rayleigh  $Ra$  et de nombres de Hartmann  $Ha$ . Les résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur est non seulement déterminé par l'intensité du champ magnétique, mais également influencé par l'angle d'orientation. Fusegi et al. [7] ont examiné numériquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée avec la génération de chaleur interne. Ils ont trouvé une bonne compatibilité avec les résultats expérimentaux de Kawara et al. [8] concernant les caractéristiques de la température et de l'écoulement. Shim et al. [9] ont mené des études numériques pour décrire l'évolution de l'écoulement instationnaire de la convection naturelle ( $Pr = 0.7$ ) dans une cavité carrée en présence d'une source de chaleur interne. Leurs résultats indiquent que l'évolution temporelle de la fonction de courant passe par trois phases différentes. Une bonne compatibilité a été constatée avec les visualisations expérimentales de Kawara et al. [8] pour un écoulement dominé par les effets du chauffage interne.

Kandaswam et al. [10] ont étudié numériquement la convection naturelle instationnaire dans une cavité chauffée partiellement par les parois verticales par contre les parois horizontales sont supposées adiabatiques avec la présence d'une source de chaleur interne. Ils ont conclu que le taux de transfert de chaleur est plus élevé lorsque les endroits thermiquement actifs sont placés au milieu des parois latérales. Par contre, Il est plus bas lorsque l'emplacement chaud est maintenu à la position supérieure et l'emplacement froid au bas des parois latérales. Oztop et al. [11] ont étudié numériquement les effets de la source de chaleur volumétrique sur le transfert de chaleur et la structure d'écoulement de la convection naturelle dans une enceinte à paroi ondulée. Les résultats obtenus ont montré que le taux de transfert de chaleur est maximal lorsque la valeur de l'amplitude des parois ondulées est élevée. Sarris et al. [12] ont étudié numériquement la convection naturelle instationnaire dans une cavité carrée latéralement chauffée remplie du lithium liquide, en présence d'un champ magnétique horizontale et une source de chaleur interne. Ils ont remarqué que lorsque le rapport  $S$  augmente, l'écoulement stationnaire devient instationnaire. Le même problème a été repris par Pelekasis [13] afin d'examiner la stabilité de l'écoulement. Il a remarqué que la solution de base est présentée par deux zones de recirculation lorsque le terme de la production de la chaleur interne est assez élevé. L'analyse de la stabilité linéaire a été effectuée en résolvant un problème de valeurs propres. Cette analyse a révélé que le système subit une bifurcation de Hopf supercritique conduisant à une branche périodique. Benos et al. [14] ont présenté une étude combinée analytique et numérique de la convection naturelle stationnaire d'un fluide conducteur d'électricité dans une cavité allongée (peu profonde) en présence du chauffage interne et du champ magnétique vertical. L'écoulement est caractérisé par une double cellule de circulation de Hadley symétrique avec la montée du fluide au centre de la cavité et sa descente à proximité des parois froides verticales. Une large gamme des nombres de Prandtl, Rayleigh et Hartmann a été considéré. Ben Hadid et al. [15] ont abordé le cas 3D de la convection naturelle MHD dans une cavité parallélépipédique dont le champ magnétique est orienté en deux directions horizontale et verticale. Ils ont observé que le champ magnétique lorsqu'il est appliqué dans la direction longitudinale.

Bessaih et al. [16] ont proposé une étude numérique de l'effet de la conductivité électrique des parois et la direction du champ magnétique sur l'écoulement de la convection naturelle d'un métal liquide ( $Pr = 0.054$ ) dans une cavité cubique. La comparaison des résultats pour les trois orientations du champ magnétique a révélé que l'important amortissement de l'écoulement est obtenu lorsque le champ est dirigé horizontalement.

Juel et al. [17] ont présenté une étude combinée expérimentale et numérique de la convection naturelle du Gallium sous l'effet d'un champ magnétique uniforme dirigé dans la direction transversale. Une comparaison entre les mesures expérimentales et les simulations numériques directes bidimensionnelles et tridimensionnelles indique l'importance des mécanismes d'écoulement 3D. Di Piazza et al. [18] ont étudié la convection naturelle tridimensionnelle dans enceinte cubique rempli d'un métal liquide. Les effets du champ magnétique et de la conductance électrique des parois sont étudiés en variant le nombre de Hartmann et la conductance. Ils ont remarqué que la suppression des mouvements convectifs était plus forte dans le centre de l'écoulement tridimensionnel complexe avec la présence des circulations secondaires. Hof et al. [19] ont rapporté les résultats d'une étude expérimentale de l'amortissement magnétohydrodynamique de la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire remplie du Gallium. La suppression de la convection est étudiée en appliquant un champ magnétique indépendamment dans chacune des trois directions principales de l'écoulement. La plus forte atténuation de l'écoulement a été trouvée dans le cas d'un champ magnétique vertical à cause du rapport d'aspect, qui est en accord avec la théorie.

Hof et al. [20] ont étudié expérimentalement l'effet du champ magnétique sur la stabilité de la convection naturelle. Ils ont remarqué que le champ magnétique lorsqu'il est appliqué dans la direction verticale est plus efficace pour la suppression des oscillations et moins efficace lorsqu'il est appliqué dans la direction horizontale. L'étude numérique de Kolsi et al. [21] s'attache à la description de la convection naturelle tridimensionnelle dans une cavité cubique différentiellement chauffée en présence d'un champ magnétique horizontal. L'application du champ magnétique sur l'écoulement d'un fluide de faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.054$ ) permet de mettre en évidence les effets de l'amortissement, la laminarisation et l'organisation du mouvement

tridimensionnel au centre de la cavité. Battira et *al.* [22] ont réalisé une étude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle d'un métal liquide (Gallium  $Pr = 0.019$ ) dans une configuration parallélépipédique chauffé différentiellement et soumis à un champ magnétique externe dans deux directions longitudinale et verticale. La stabilisation la plus forte de l'écoulement est remarquée lorsque le champ magnétique est orienté verticalement. Pour un champ magnétique élevé, la conduction est le mode dominant du transfert thermique dans le l'enceinte. Un bon accord est obtenu avec les résultats numériques de Ben Hadid et *al.* [23] concernant la distribution du potentiel électrique dans le cas des parois isolantes électriquement et les données expérimentales de Hof et *al.* [19] concernant la distribution de température dans l'enceinte.

Ce travail a pour but d'étudier l'influence du chauffage volumique sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique dans une cavité parallélépipédique soumise un champ magnétique externe.

## 2. Géométrie et formulation mathématique

Les équations régissant le phénomène de la convection la convection naturelle tridimensionnelle en présence d'un champ magnétique externe et d'une source de chaleur interne sont déduites des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et des équations de la magnétohydrodynamique.

La géométrie étudiée est une cavité cubique ( $A_x = A_y = A_z = 1$ ), remplie complètement du lithium liquide ( $Pr = 0.0321$ ) différentiellement chauffée par les parois latérales maintenues à des températures constantes. L'écoulement de la convection naturelle qui se développe dans cette configuration est sous l'influence d'un champ magnétique extérieur avec la présence d'une source de chaleur interne (Figure1).

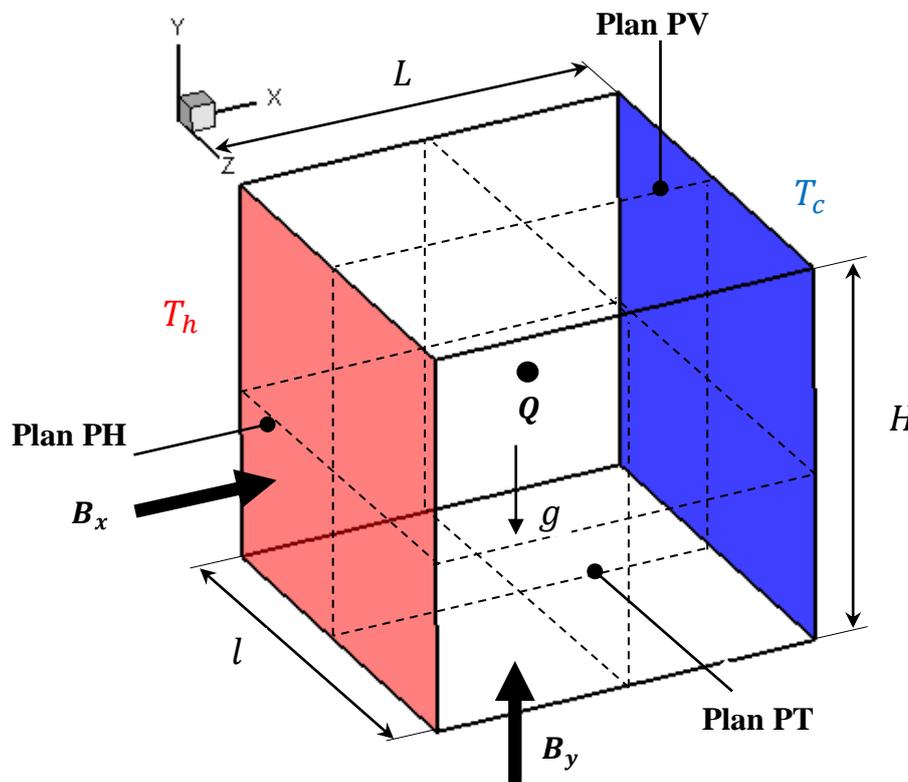


Figure 1 : Configuration tridimensionnelle étudiée : cavité cubique différentiellement chauffée.

Afin de simplifier la formulation mathématique du problème, nous adapterons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement est laminaire et instationnaire.
- Les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est valide, celle-ci consiste à considérer les variations de masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantité de mouvement ( $\rho = \rho_0$ ), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de la masse volumique  $\rho$  en fonction de la température est donnée par :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique à la température de référence  $T_0$  et  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

- La dissipation visqueuse est négligeable.
- L'effet Joule est négligeable [4].
- Le champ magnétique induit est négligeable.
- Le métal liquide est non magnétisé [24].

Les grandeurs physiques ont été normalisées avec les valeurs caractéristiques respectives suivantes :

$$\tau = t \frac{v}{H^2}, (X, Y, Z) = (x, y, z) \frac{1}{H}, (U, V, W) = (u, v, w) \frac{H}{\vartheta}, P = p \frac{H^2}{\rho \vartheta^2}, \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, J = \frac{j}{\sigma B_0 \left(\frac{\vartheta}{H}\right)}, \Phi = \frac{\varphi}{(\vartheta B_0)} \quad (2)$$

pour la longueur, le temps, la vitesse, la pression, la température, la densité du courant électrique et le potentiel électrique, respectivement.

En utilisant les grandeurs de référence définies précédemment, les équations adimensionnées du système s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} + \frac{\partial(WU)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] + F_{EMx} \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} + \frac{\partial(WV)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + Gr\theta + F_{EMy} \quad (5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial(UW)}{\partial X} + \frac{\partial(VW)}{\partial Y} + \frac{\partial(WW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right] + F_{EMz} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} + \frac{\partial(W\theta)}{\partial Z} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right] + S_Q \quad (8)$$

- Cas où le champ magnétique est appliqué selon la direction  $x$  :

$$F_{EMx} = 0 \quad ; \quad J_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (9.a)$$

$$F_{EMy} = \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial Z} - V \right) \cdot (Ha)^2 \quad ; \quad J_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + W \quad (9.b)$$

$$F_{EMz} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - W \right) \cdot (Ha)^2 \quad ; \quad J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z} - V \quad (9.c)$$

L'équation du potentiel électrique est :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Z} \quad (10)$$

- Cas où le champ magnétique est appliqué selon la direction  $y$  :

$$F_{EMx} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial Z} - U \right) \cdot (Ha)^2 \quad ; \quad J_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} - W \quad (11.a)$$

$$F_{EMy} = 0 \quad ; \quad J_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \quad (11.b)$$

$$F_{EMz} = \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial X} - W \right) \cdot (Ha)^2 \quad ; \quad J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + U \quad (11.c)$$

L'équation du potentiel électrique est :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial W}{\partial X} \quad (12)$$

Les équations adimensionnelles décrites précédemment sont résolues en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux frontières suivantes :

Pour  $\tau = 0$ :  $U = V = W = \theta = 0$ .

Pour  $\tau > 0$ :

$$U = V = W = 0|_{X=0, A_x} \quad ; \quad \theta = 1|_{X=0} \quad \text{et} \quad \theta = 0|_{X=A_x} \quad (13.a)$$

$$U = V = W = 0|_{Y=0,1} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0|_{Y=0,1} \quad (13.b)$$

$$U = V = W = 0|_{Z=0, A_z} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0|_{Z=0, A_z} \quad (13.c)$$

Pour les parois isolantes électriquement, la condition à la limite du potentiel électrique est :  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ , où  $n$  étant la direction perpendiculaire.

Le nombre de Nusselt moyen près des parois isothermes est donné par la relation suivante :

$$\overline{Nu}_{X=0, A_x} = \int_0^1 \int_0^1 \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) dY dZ \quad (14)$$

### 3. Méthode numérique

Afin de résoudre le système d'équations gouvernantes associées à leurs conditions initiales et aux limites, nous avons employé la méthode des volumes finis utilisant l'algorithme SIMPLER (Patankar [25]). Nous avons adopté un schéma temporel du second ordre d'Euler backward pour les termes instationnaires et le schéma explicite d'ordre deux d'Adams-Bashforth pour les termes convectifs et non linéaires

La convergence à l'état stationnaire est atteinte lorsque l'expression suivante est satisfaite :

$$(\phi^{n+1} - \phi^n) / \phi^n \leq \varepsilon = 10^{-4} \quad (15)$$

Où :  $\phi$  est la variable dépendante qui représente  $U, V, W$  ou  $\theta$  et  $n$  est le nombre d'itérations.

Afin d'obtenir un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul, nous avons choisi la grille  $102 \times 72 \times 52$ . Pour l'étape de validation, nous nous sommes référés au travail expérimental de Hof et al. [19] portant sur l'écoulement de la convection naturelle d'un fluide à faible nombre de Prandtl dans une cavité parallélépipédique ( $5 \times 1.3 \times 1$ ). Un accord satisfaisant est obtenu lorsque l'on confronte nos résultats à ceux de la référence [19].

### 4. Résultats et discussions

#### 4.1 Effet de la source de chaleur interne

Pour examiner l'effet de l'augmentation du paramètre source  $S_Q$  sur la structure de l'écoulement, nous avons varié ce paramètre dans la gamme de 800 à 1100. Cet effet peut être examiné en premier lieu à travers les valeurs des paramètres caractérisant l'écoulement pour  $Gr = 10^6$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $A = 1$  et  $Ha = 0$ . Ainsi, l'augmentation de  $S_Q$  génère une intensification de circulation de l'écoulement dans l'enceinte provoqué par l'effet de la force de flottabilité.

Lorsqu'on augmente le paramètre  $S_Q$ , l'écoulement devient bicellulaire. La deuxième cellule est localisée près de la paroi chauffée, où elle prend naissance à partir de deux cellules secondaires qui se trouvent en haut et en bas de cette paroi dans les coins de la cavité. Ces cellules secondaires prennent place d'une façon progressive lorsqu'on augmente  $S_Q$  jusqu'à la collusion entre eux en formant une seule cellule qui comprend deux cellules contrarotatives. Pour expliquer mieux le phénomène, le chauffage volumétrique engendre une augmentation de la température de fluide au milieu de l'enceinte. Cette situation a créé une zone plus chaude que la paroi chauffée. La première cellule qui se trouve à gauche est due au gradient horizontal entre la paroi chaude et la région du milieu. Ceci est montré par la circulation antihoraire du fluide dans cette région. Par contre dans la région de droite, la circulation est horaire.

L'effet de la source interne sur l'écoulement, les solutions stationnaires dans le plan de symétrie  $Z = 0.5$  sont similaires aux solutions 2D, ce qui confirme la bonne représentation de l'écoulement dans le plan vertical médian par l'approximation bidimensionnelle [26]. Les champs d'écoulement et les champs thermiques restent inchangés malgré quelques différences causées par le confinement de l'écoulement dans la troisième direction. Contrairement aux simulations instationnaires 2D, le changement de topologie est radical et l'écoulement est influencé par la 3<sup>ème</sup> direction. Ceci est remarqué dans les seuils critiques  $S_{Q_{Cr}}$  qui sont différents dans les deux cas 3D et 2D. Par exemple dans le cas 2D, la valeur critique pour les paramètres de contrôle suivants :  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 0$  et  $A = 1$  est  $S_{Q_{Cr 2D}} = 4.5 \times 10^3$ . Cette valeur est supérieure pour le cas 3D où on trouve une valeur inférieure qui vaut  $S_{Q_{Cr 3D}} = 800$ . Rappelons que les valeurs  $S_{Q_{Cr}}$  représentent les seuils critiques de transition de l'écoulement stationnaire vers l'écoulement oscillatoire. L'instationnarité des écoulements 2D où 3D remarquée lors des simulations numériques a confirmé que l'origine des instabilités est tridimensionnelle.

À partir du seuil critique de l'écoulement 3D ( $S_{Q_{Cr}} = 800$ ), la simulation numérique met en évidence l'existence d'un écoulement oscillatoire qui présente un aspect périodique régulier avec une fréquence dominante  $\xi = 112.706$  et leur harmoniques impaires. Notons ici que l'écoulement composé de deux cellules contrarotatives a subi une bifurcation de Hopf. Malgré l'aspect oscillatoire de l'écoulement, son symétrie par rapport au plan vertical (PV) est maintenue. Ceci est illustré sur la figure 2 qui montrent respectivement les trajectoires des particules fluides et les isothermes dans les plans verticaux  $Z = 0.25, 0.5$  et  $0.75$ .

Lorsqu'on augmente le paramètre source à  $S_Q = 1000$ , les trajectoires des particules de fluide et les isothermes présentées sur la figure 3 montrent une topologie tridimensionnelle de l'écoulement oscillatoire avec une brisure partielle de symétrie par rapport au plan vertical médian de la cavité. Il est à noter qu'à cette valeur du paramètre source, le régime de l'écoulement devient quasi-périodique indiquant une sensibilité remarquable du cas 3D par rapport au cas 2D vis à vis les conditions aux limites.

Si l'on continue à augmenter le paramètre source jusqu'à  $S_Q = 1100$ , les oscillations deviennent stable en amplitude. Cependant la structure de l'écoulement est complexe si nous observons la figure 4 qui représente les trajectoires des particules de fluide et les isothermes dans les plans  $Z = 0.25, Z = 0.5$  et  $0.75$ .

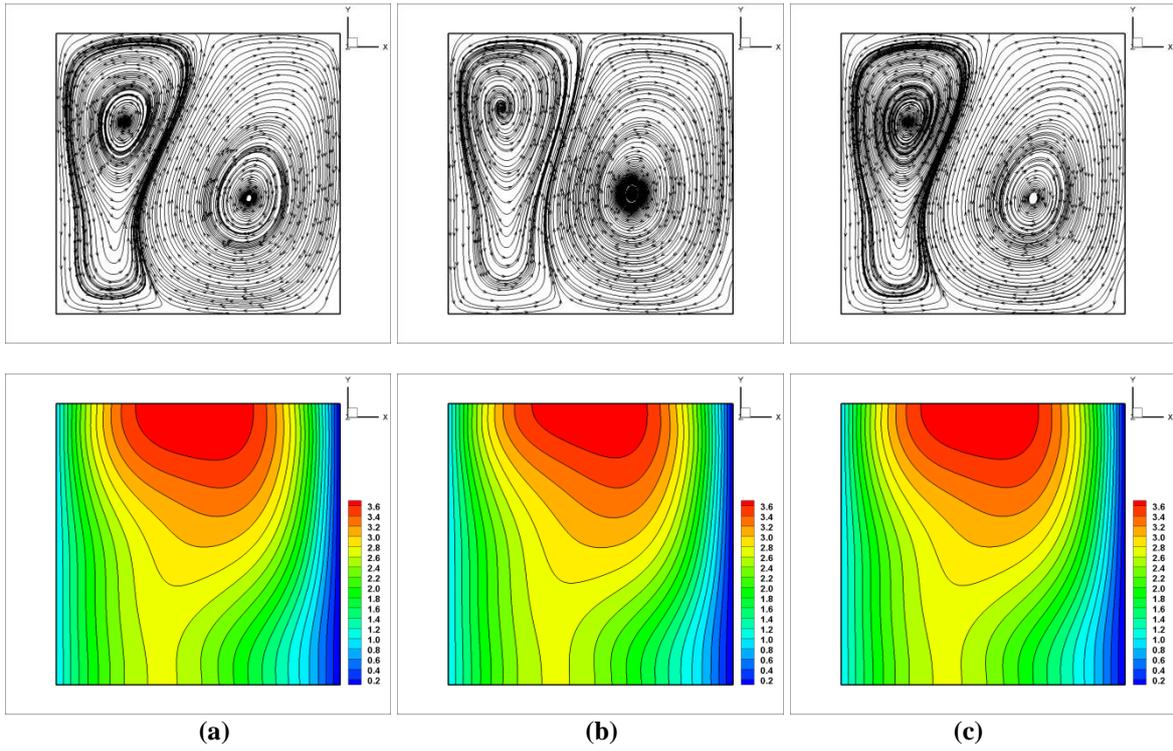


Figure 2 : Trajectoires des particules de fluide et isothermes à (a)  $Z = 0.25$ , (b)  $Z = 0.5$  et (c)  $Z = 0.75$  pour  $Gr = 10^5$ ;  $Pr = 0.0321$ ;  $Ha = 0$ ;  $A = 1$  et  $S_Q = 800$ .

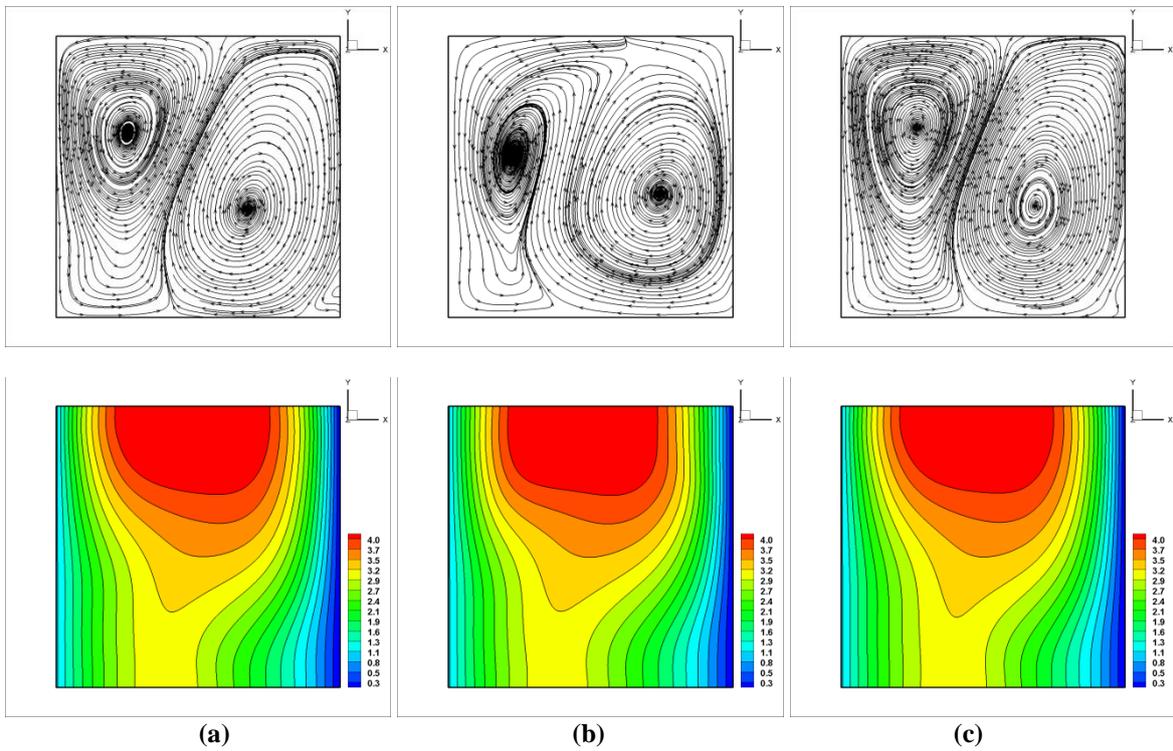


Figure 3 : Trajectoires des particules de fluide et isothermes à (a)  $Z = 0.25$ , (b)  $Z = 0.5$  et (c)  $Z = 0.75$  pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 0$ ,  $A = 1$  et  $S_Q = 10^3$ .

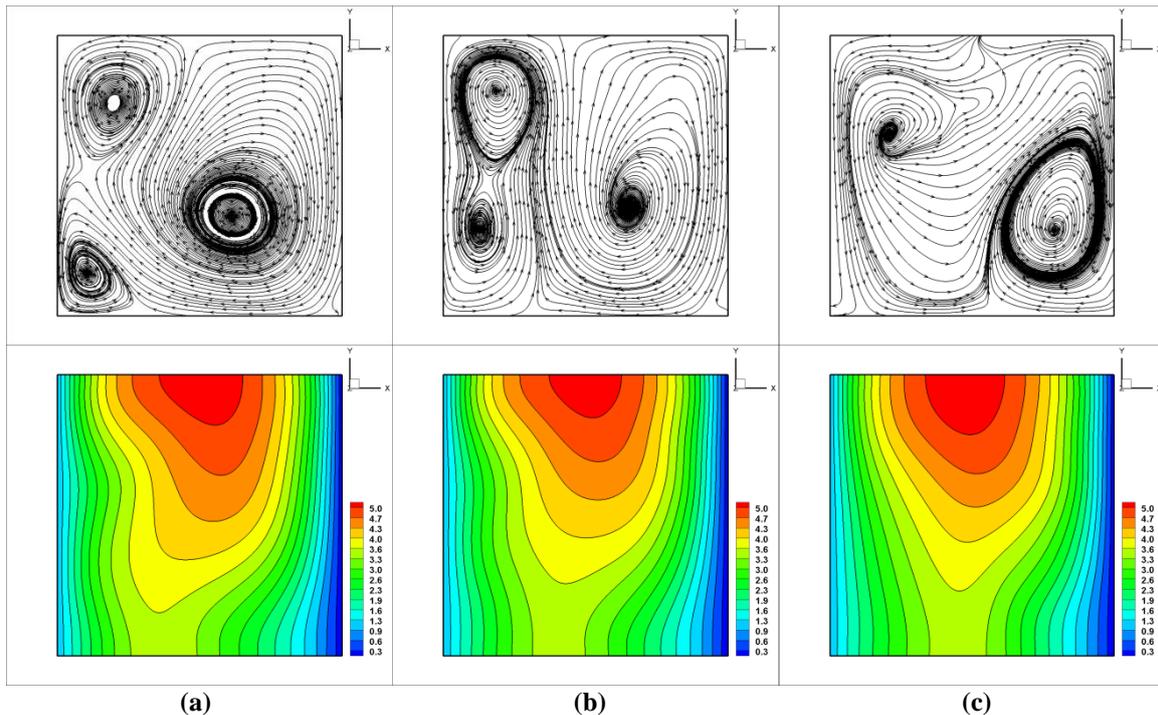


Figure 4 : Trajectoires des particules de fluide et isothermes à (a)  $Z = 0.25$ , (b)  $Z = 0.5$  et (c)  $Z = 0.75$  pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 0$ ,  $A = 1$  et  $S_Q = 1.1 \times 10^3$ .

#### 4.2 Effet du champ magnétique

L'écoulement de la convection naturelle subit en général un amortissement dès lors qu'on applique un champ magnétique. Celui-ci est plus efficace s'il est dirigé horizontalement dans notre configuration étudiée (cavité cubique) comme le montre le tableau 1. Ce tableau récapitulatif fait apparaître les principaux paramètres de l'écoulement stationnaire pour  $Gr = 10^5$ ,  $S_Q = 10^3$  et pour différents nombres de Hartmann. En plus, cette efficacité devient remarquable lorsque l'écoulement est instationnaire. Les évolutions temporelles montrent de la vitesse  $W$  pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 10$ ,  $A = 1$  et  $S_Q = 10^3$ , dans les deux cas ; champ magnétique horizontal et l'autre vertical, une atténuation des oscillations pour le premier cas, mais ces oscillations persistent dans le deuxième cas.

Au-delà de la valeur de  $Ha = 25$ , le régime de l'écoulement devient stationnaire pour les deux orientations du champ magnétique. L'écoulement montre une structure composée de deux cellules contrarotatives presque de même taille pour un champ magnétique faible  $Ha = 25$  (Figures 5 et 6). Dans ce régime, les isothermes sont déformées indiquant que la convection est relativement importante. Ceci est remarqué sur la figure 7 qui montre la force de Lorentz dans le plan PV où on constate que l'intensité de cette force est faible par rapport au cas  $Ha = 100$ . Il est à noter que la force de Lorentz agit dans le sens contraire de l'écoulement. Si le champ magnétique est horizontal, cette force est dirigée verticalement mais dans le cas où le champ magnétique est vertical, la force est horizontale.

D'après la figure 8, le champ magnétique horizontal intense ( $Ha = 100$ ) induit des changements importants dans les vecteurs de vitesse qui montrent des pics près des parois horizontales plus prononcées par rapport au champ magnétique vertical. De plus, les magnitudes des vitesses sont moins importantes pour le cas d'un champ magnétique horizontal. Dans ce cas, la décélération du mouvement du fluide s'accroît et le transfert de chaleur est caractérisé par une stratification thermique visualisée par des isothermes qui sont devenues parallèles (Figures 8). La distribution du courant électrique responsable de la création de la force électromagnétique présentée sur la figure 9, montre que le mécanisme produisant les courants électriques est dû au mouvement du fluide [27]. De plus, la conservation du courant génère une fermeture des lignes de courants pour notre problème où les parois sont isolantes électriquement [16].

Cernant le taux transfert de chaleur près des parois isothermes représenté par le nombre de Nusselt local  $Nu$ , les figures 10.a et 10.b montrent que le mode de transfert de chaleur dominant est la convection pour  $Ha = 25$ . Dans ce cas, un changement rapide de la distribution de  $Nu$  est remarqué dans la direction verticale  $Y$ , par contre pour  $Ha = 100$ , le changement de  $Nu$  dans la direction verticale est très lent ce qui indique que le mode de transfert de chaleur dominant dans l'enceinte est la conduction. Il faut noter que la distribution de  $Nu$  à la paroi froide montre des motifs presque symétriques par rapport à la paroi chaude. L'influence de la direction du champ magnétique sur la distribution du nombre de Nusselt local s'exprime par les valeurs moins élevées de  $Nu$  dans l'enceinte lorsqu'elle est exposée à un champ magnétique vertical contrairement au champ magnétique

horizontal. Ceci est une indication que l'activité de la convection est plus prononcée pour un champ magnétique dirigé verticalement. Il est intéressant de noter aussi qu'aux nombres de Hartmann élevés ( $Ha = 100$ ), les variations de  $Nu$  par rapport à la direction  $Z$  sont visibles uniquement dans les zones à proximité des parois d'extrémité ( $Z = 0$  et  $1$ ).

En continuant à augmenter l'intensité de la source à  $S_Q = 1.3 \times 10^3$ , l'évolution temporelle de la vitesse  $W$  représentée sur la figure 11 montre une enveloppe du signal qui pulse avec une fréquence  $1/36$ ème de la fréquence principale des oscillations  $\xi = 134.248$ .

Tableau 1 : Effet du nombre de  $Ha$  sur les caractéristiques de l'écoulement pour  $Gr = 10^5$  et  $S_Q = 10^3$

	$Ha = 25$	$Ha = 50$	$Ha = 75$	$Ha = 100$
<b>Champ magnétique horizontal</b>				
$U_{max}$	234.962	129.314	78.235	53.130
$V_{max}$	316.652	142.215	78.315	47.689
$W_{max}$	29.986	31.337	13.977	7.030
$\overline{Nu}_{x=0}$	-14.507	-14.929	-15.016	-15.037
$\overline{Nu}_{x=A_x}$	17.592	17.170	17.083	17.062
<b>Champ magnétique vertical</b>				
$U_{max}$	270.977	176.268	120.355	84.169
$V_{max}$	444.342	314.402	227.822	174.028
$W_{max}$	66.628	33.663	26.638	19.342
$\overline{Nu}_{x=0}$	-14.390	-14.770	-14.939	-15.003
$\overline{Nu}_{x=A_x}$	17.709	17.329	17.160	17.096

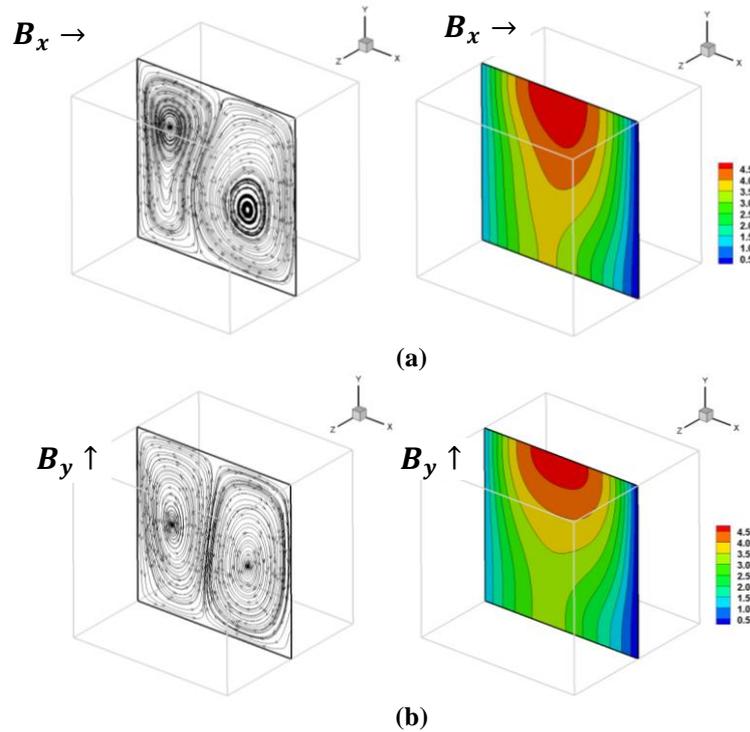
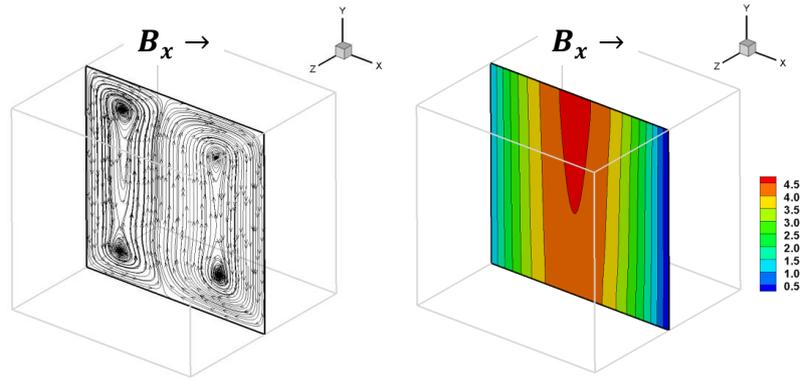
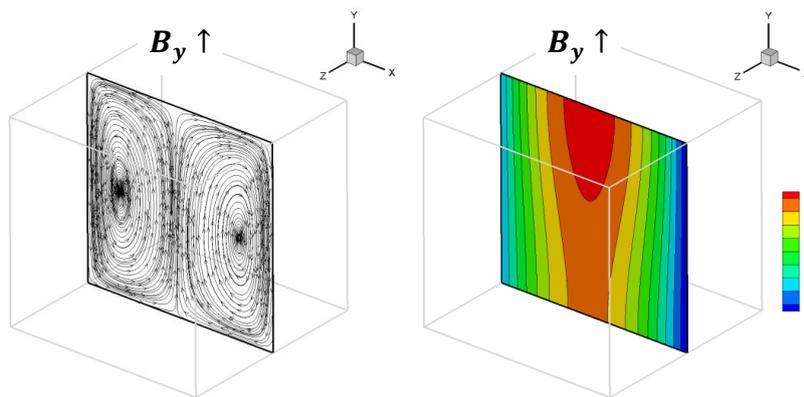


Figure 5 : Trajectoires des particules de fluide et isothermes pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 25$ ,  $A = 1$  et  $S_Q = 10^3$  : (a) champ magnétique horizontal, (b) champ magnétique vertical.

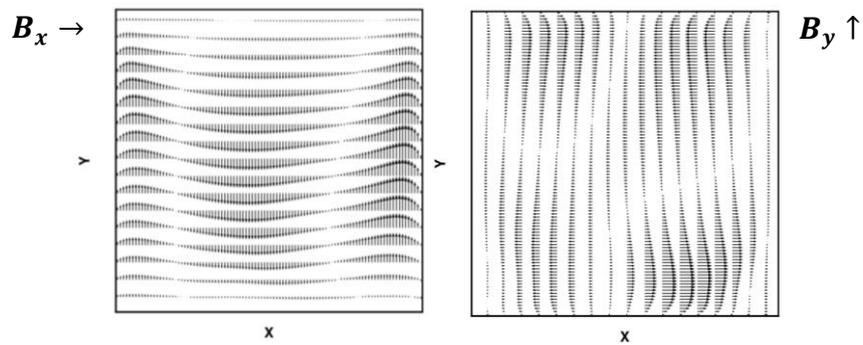


(a)

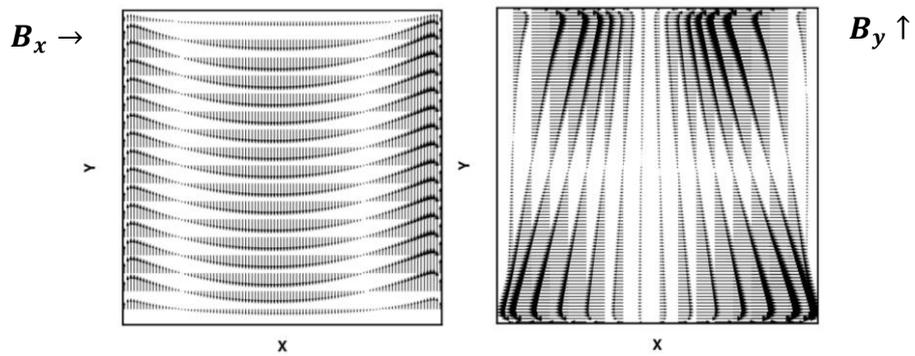


(b)

Figure 6 : Trajectoires des particules de fluide et isothermes pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 100$ ,  $A = 1$  et  $S_Q = 10^3$  : (a) champ magnétique horizontal, (b) champ magnétique vertical.



(a)



(b)

Figure 7 : Force de Lorentz dans le plan PV pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $A = 1$  et (a)  $Ha = 25$  et (b) 100.

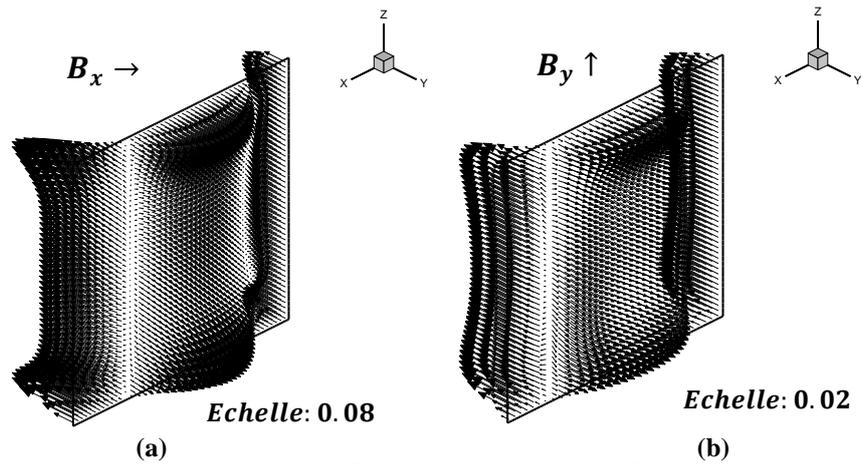


Figure 8 : Vecteurs de vitesses pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $S_Q = 10^3$ ,  $A = 1$  et  $Ha = 100$  : (a) champ magnétique horizontal, (b) champ magnétique vertical.

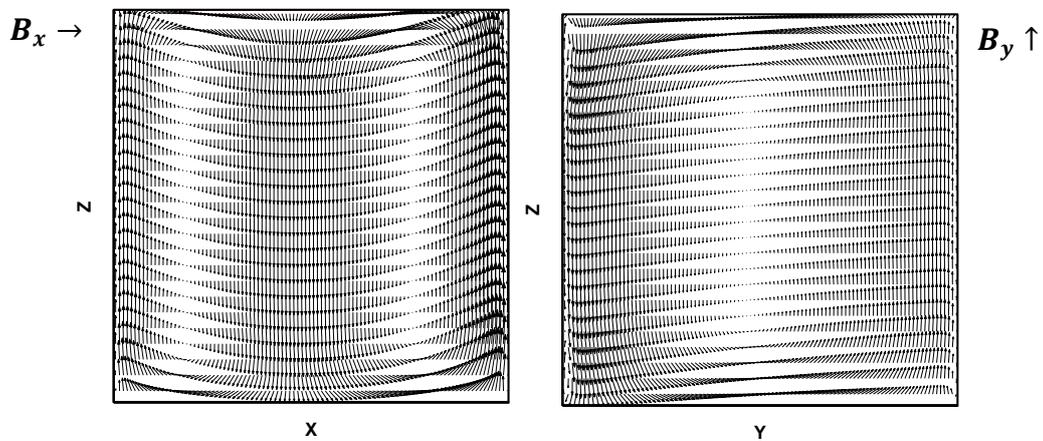


Figure 9 : Vecteurs de densité de courant électrique dans les plan PH et PT respectivement pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $S_Q = 10^3$ ,  $A = 1$  et  $Ha = 100$  : (a) champ magnétique horizontal, (b) champ magnétique vertical.

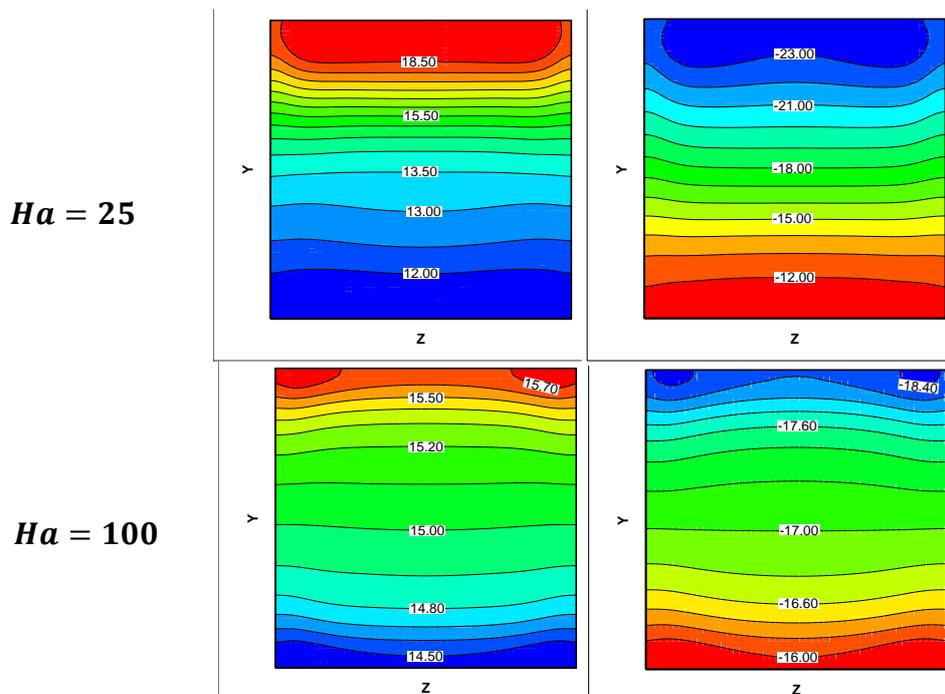


Figure 10.a : Nombre de Nusselt local près de la paroi chaude et la paroi froide pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $S_Q = 10^3$ ,  $A = 1$  et  $Ha = 100$  : champ magnétique horizontal.

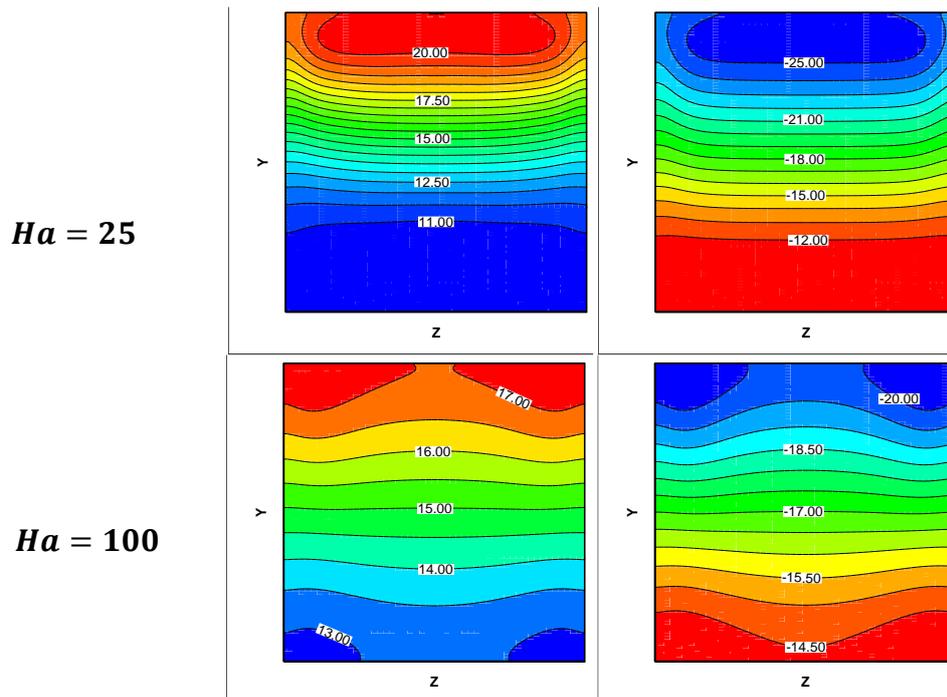


Figure 10.b : Nombre de Nusselt local près de la paroi chaude et la paroi froide pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $S_Q = 10^3$ ,  $A = 1$  et  $Ha = 100$  : champ magnétique vertical.

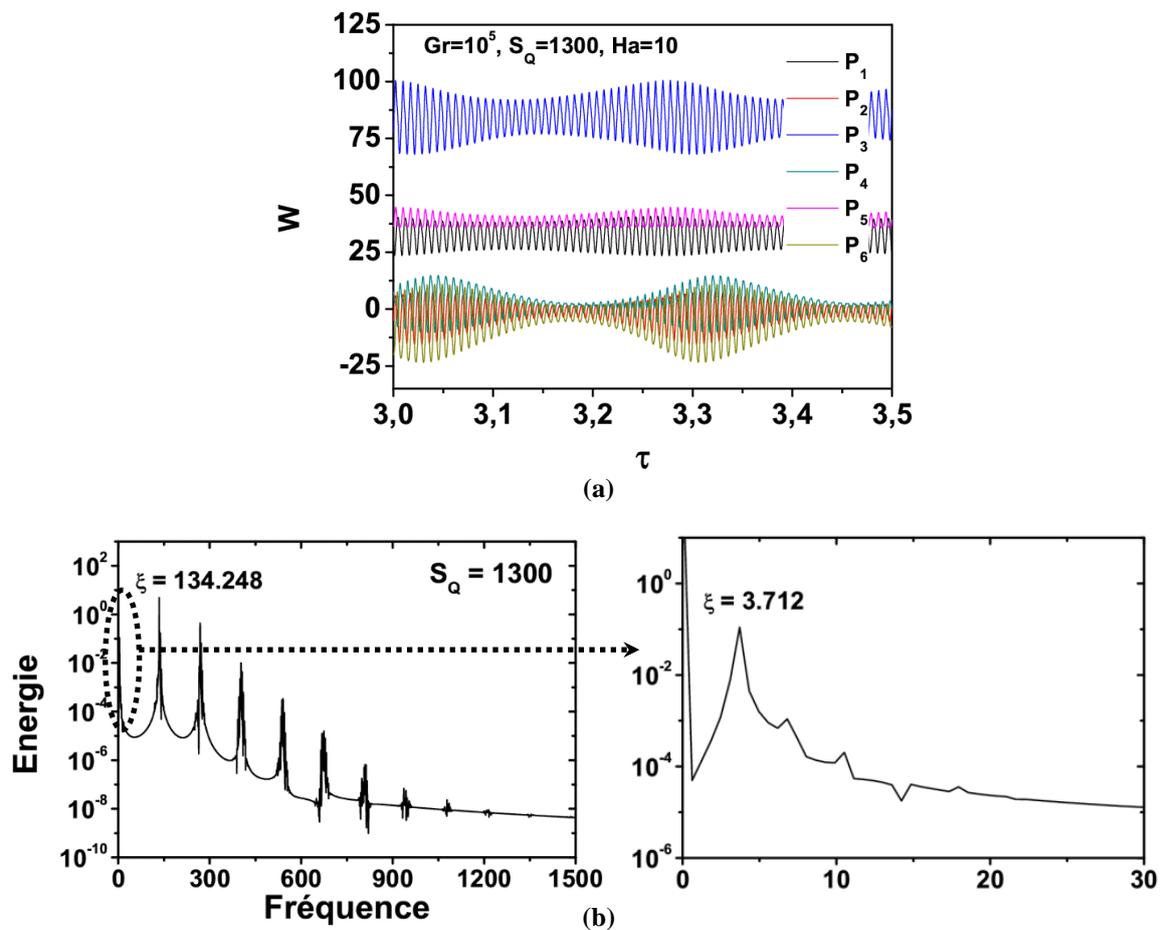


Figure 11 : Évolutions temporelles de la vitesse  $W$  pour  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0.0321$ ,  $Ha = 10$ ,  $A = 1$  et  $S_Q = 1.3 \times 10^3$  et le spectre d'énergie correspondant (champ magnétique horizontal).

## Conclusion

Lors de ce travail, nous avons étudié numériquement l'écoulement de la convection naturelle dans des cavités confinées et différentiellement chauffées en présence d'un champ magnétique externe et d'une source de chaleur volumique. Le cas tridimensionnel de l'écoulement est traité en supposant que les parois sont isolées électriquement. Les résultats issus des calculs tridimensionnels dans le cas stationnaire sont similaires au cas bidimensionnel. La différence est particulièrement nette lorsqu'on compare les résultats du cas instationnaire. Il en résulte que les valeurs des seuils  $S_{Q_{Cr}}$  pour le cas 3D sont moins inférieures que le cas 2D ce que justifie l'effet important du confinement dans la troisième direction. Ce passage rappelle que l'écoulement a subi une bifurcation de Hopf. Le début des oscillations est caractérisé par le maintien de la symétrie des solutions par rapport au plan vertical. La brisure de symétrie est observée si on augmente plus au-delà du seuil critique et dans ce cas, l'écoulement expose une topologie complexe. L'influence de la direction du champ magnétique a été étudiée pour deux orientations horizontal et vertical montrant que l'efficacité du champ horizontal est nettement supérieure au champ vertical.

## Nomenclature

$A$	Rapport d'aspect géométrique	$T$	Température dimensionnelle, $K$
$c_p$	Chaleur spécifique, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	$U, V, W$	Vitesses adimensionnelles (cartésiennes)
$F$	Force de Lorentz adimensionnelle	$X, Y, Z$	Coordonnées adimensionnelles
$g$	Accélération de la pesanteur, $m \cdot s^{-2}$	<i>Lettres grecs</i>	
$Gr$	Nombre de Grashof, = $g\beta(T_h - T_c)H^3/\vartheta^2$	$\beta$	Coefficient of thermal expansion, $K^{-1}$
$H$	Hauteur de la cavité, $m$	$\delta$	Période adimensionnelle d'une oscillation
$h$	Coefficient du transfert de chaleur, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$	$\theta$	Température adimensionnelle
$Ha$	Nombre de Hartmann, = $B_0 H \sqrt{\sigma/\rho\vartheta}$	$\vartheta$	Viscosité cinématique, $m^2 \cdot s^{-1}$
$j$	Vecteur de densité du courant électrique, $A \cdot m^{-2}$	$\xi$	Fréquence adimensionnelle
$J_x, J_y, J_z$	Composantes adimensionnelles du vecteur de densité de courant électrique	$\rho$	Masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
$k$	Conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	$\sigma$	Conductivité électrique, $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
$L$	Longueur de la cavité, $m$	$\tau$	Temps adimensionnel
$l$	Largeur de la cavité, $m$	$\psi$	Fonction de courant adimensionnelle
$Nu$	Nombre de Nusselt local		Potentiel électrique, $V$
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen	$\Phi$	Potentiel électrique adimensionnel
$P$	Pression adimensionnelle	$\phi$	Variable générale
$Pr$	Nombre de Prandtl, = $\vartheta/\alpha$	$\Delta\tau$	Pas du temps adimensionnel
$Q$	Génération de chaleur interne, $W \cdot m^{-3}$	<i>Indices et exposants</i>	
$S_Q$	Paramètre de source de chaleur interne, = $QH^2/\vartheta\rho c_p(T_h - T_c)$	$c$	Froid
		$Cr$	Critique
		$EM$	Électromagnétique
		$h$	Chaud
		$n$	Nombre d'itération

## Références

- [1] A. Kharicha, S. Molokov, S. Aleksandrova & L. Bühler. Buoyant convection in the Helium-cooled Lithium lead blanket, in a strong uniform magnetic field. Forschungszentrum Karlsruhe, FZKA 6959, 2004.
- [2] D.T.J. Hurle. Crystal growing from the melt, Springer, 1993.
- [3] H. BenHadid, D. Henry & S. Kaddeche. Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part 1. Two-dimensional flow. Journal of Fluid Mechanics, vol. 333, pp. 23–56, 1997.
- [4] A.Y. Gelfgat & P.Z. Bar-Yoseph. The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity. Physics of Fluids, vol. 13 (8), pp. 2269–2278, 2001.
- [5] R. Bessaih & S. Bouabdallah. Numerical study of oscillatory natural convection during solidification of a liquid metal in a rectangular enclosure with and without magnetic field. Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 54, pp. 331–345, 2008.

- [6] P.X. Yu, J.X. Qiu, Q. Qin & Z.F. Tian. Numerical investigation of natural convection in a rectangular cavity under different directions of uniform magnetic field. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 67, pp. 1131–1144, 2013.
- [7] T. Fusegi, J.M. Hyun & K. Kuwahara. Numerical study of natural convection in a differentially heated cavity with internal heat generation: Effects of the aspect ratio. *Trans ASME: Journal of Heat Transfer*, vol. 114, pp. 773–777, 1992.
- [8] Z. Kawara, I. Kishiguchi, N. Aoki & I. Michiyoshi. Natural convection in a vertical fluid layer with internal heating. *Proceedings, 27<sup>th</sup> National Heat Transfer Symposium of Japan*, vol. 2, pp. 115–117, 1990.
- [9] Y.M. Shim & J.M. Hyun. Transient confined natural convection with internal heat generation. *International Journal Heat and Fluid Flow*, vol. 18, pp. 328–333, 1997.
- [10] P. Kandaswamy, N. Nithyadevi & C.O. Ng. Natural convection in enclosures with partially thermally active side walls containing internal heat sources. *Physics of Fluids*, vol. 20 (097104), pp. 1–9, 2008.
- [11] H.F. Oztop, E. Abu-Nada, Y. Varol & A. Chamkha. Natural convection in wavy enclosures with volumetric heat sources. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, pp. 502–514, 2011.
- [12] I.E. Sarris, S.C. Kakarantza, A.P. Greco & N.S. Vlachos. MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 48, pp. 3443–3453, 2005.
- [13] N.A. Pelekasi. Linear stability analysis and dynamic simulations of free convection in a differentially heated cavity in the presence of a horizontal magnetic field and a uniform heat source. *Physics of Fluids*, vol. 18 (034101), pp. 1–23, 2006.
- [14] L.T. Benos, S.C. Kakarantzas, I.E. Sarris, A.P. Grecos & N.S. Vlachos. Analytical and numerical study of MHD natural convection in a horizontal shallow cavity with heat generation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 75, pp.19–30, 2014.
- [15] H. Ben Hadid & D. Henry. Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part 2. Three-dimensional flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 333, pp. 57–83, 1997.
- [16] R. Bessaih, M. Kadja & P. Marty. Effect of wall electrical conductivity and magnetic field orientation on liquid metal flow in a geometry similar to the horizontal Bridgman configuration for crystal growth. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 4345–4362, 1999.
- [17] A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadid & D. Henry. Magneto-hydrodynamic convection in molten Gallium. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 378, pp. 97–118, 1999.
- [18] I. Di Piazza & M. Ciofalo. MHD free convection in a liquid metal filled cubic enclosure. I. Differential heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 45, pp. 1477–1492, 2002.
- [19] B. Hof, A. Juel & T. Mullin. Magneto-hydrodynamic damping of convective flows in molten gallium. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 482, pp. 163–179, 2003.
- [20] B. Hof, A. Juel & T. Mullin. Magneto-hydrodynamic damping of oscillations in low-Prandtl-number convection. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 545, pp. 193–201, 2005.
- [21] L. Kolsi, A. Abidi, M. N. Borjini, N. Daous, & H. Ben Aïssia. Effect of an external magnetic field on the 3-D unsteady natural convection in a cubical enclosure. *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 51, pp. 1003–1021, 2007.
- [22] M. Battira & R. Bessaih. Three dimensional natural convection in the horizontal Bridgman configuration under various wall electrical conductivity and magnetic field. *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 55, pp. 58–76, 2009.
- [23] I. Di Piazza & M. Ciofalo. MHD free convection in a liquid metal filled cubic enclosure. II. Internal heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 45, pp. 1493–1511, 2002.
- [24] R. Moreau. *Magneto-hydrodynamics*. Kluwer Academic Publisher, 1990.
- [25] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, New York, 1980.
- [26] G. de Gassowski, S. Xin & O. Daube. Bifurcations et solutions multiples en cavité 3D différenciellement chauffée. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 331, pp. 705–711, 2003.
- [27] F. Berrahil, S. Benissaad, K. Talbi, A. Bouttout. Effet d'un champ magnétique externe sur la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire tridimensionnelle. *Journées Internationales de Thermique (JITH)*, tome 1, pp. 379–384, 2007.