



## Etude numérique de la convection naturelle double diffusive avec rayonnement de gaz dans une cavité annulaire

Abdelaziz BOUSSANDEL<sup>1</sup>, Nouredine RETIEL<sup>1</sup>, Siham LAOUAR-MEFTAH<sup>2</sup>, Abderrahmane BENBRIK<sup>2</sup>, Denis LEMONNIER<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LMNEPM, Département de Mécanique, Université Ibn Badis de Mostaganem, Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire de Fiabilité des Equipements Pétroliers et Matériaux (LFEPM),  
Université M'Hamed Bougara, Boumerdès, Algérie.

<sup>3</sup>Institut P', CNRS, ENSMA, Université de Poitiers, France

*abdelaziz.boussandel@univ-mosta.dz, noredine.retiel@univ-mosta.dz, laouarmeftah@gmail.com, abderrahmane.benbrik@univ-boumerdes.dz, denis.lemonnier@ensma.fr*

**Résumé :** dans ce travail, nous avons étudié numériquement l'effet du rayonnement volumique sur la convection naturelle de double diffusion dans une cavité annulaire contenant un gaz gris absorbant, émettant et non diffusant du rayonnement thermique. Les parois verticales sont maintenues à des températures et concentrations différentes de façon à créer des écoulements aidant ou opposant. La méthode des volumes finis (moyennant l'algorithme SIMPLER) a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes et la méthode des ordonnées discrètes (quadrature S8) pour traiter l'aspect radiatif du problème. L'influence du rayonnement est déterminée par comparaison avec le cas de la convection double diffusive (sans rayonnement). Les résultats obtenus montrent que le rayonnement affecte considérablement, la structure de l'écoulement, les champs de température et de concentration et diminue le transfert de chaleur par convection

**Mots clés :** Convection naturelle de double diffusion, Rayonnement des gaz, Volumes finis, Méthode des ordonnées discrètes.

### 1. Introduction

La convection naturelle de double diffusion a été largement étudiée numériquement pour différentes configurations et géométries [1-3]. Dans ce cas, l'écoulement du fluide est dû aux forces d'origine thermiques et massiques (milieu transparent). Lorsque le milieu est semi-transparent (absorbe et émet le rayonnement thermique), il faut alors tenir compte d'une source de chaleur interne au milieu, résultant de la différence entre l'énergie radiative absorbée et celle qui a été émise par chaque élément de volume.

Le problème du couplage convection naturelle thermique ou de double diffusion avec rayonnement volumique attire toujours l'attention de chercheurs du fait de leur importante application dans le domaine industriel (réacteurs nucléaires, refroidissements des composantes électroniques, chambres de combustions). Beaucoup de chercheurs [4-6] ont étudié l'influence du rayonnement volumique sur la convection naturelle en déduisant que le rayonnement volumique intensifie les champs de vitesses et températures pour les grands nombres de Rayleigh. Borjini et al [7] ont étudié l'effet des propriétés radiatives sur la convection naturelle de double diffusion en présence d'un champ magnétique, A. Mezrhab et al [8] ont supposé que l'absorption du fluide est fonction de sa concentration locale. Ces chercheurs ont montré que les effets radiatifs sont plus importants lorsque les forces thermiques sont dominantes ou comparable aux forces massiques. La variation du coefficient d'absorption avec la longueur d'onde, la température et la concentration locale du fluide (cas réel) a été étudiée par [10-12], les résultats montrent que le rayonnement volumique réduit le transfert de chaleur total quelque soit le régime d'écoulement.

La majorité des travaux abordant le problème du couplage convection – rayonnement ont été réalisés dans le cas de cavités rectangulaires ou carrées. L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet du rayonnement volumique sur la convection naturelle laminaire de double diffusion en régime stationnaire dans une cavité annulaire. Cette cavité est différentiellement chauffée et remplie d'un gaz gris absorbant, émettant et non diffusant le rayonnement.

## 2. Modèle physique

Il s'agit d'une cavité annulaire verticale (fig.1) de hauteur  $H$  et de rayons intérieur et extérieur  $R_i$  et  $R_o$  respectivement ( $K=R_o/R_i$  représente le rapport des rayons) et ( $A= H/(R_o-R_i)$  est le rapport de forme). Les parois horizontales sont parfaitement réfléchissantes et imperméables aux transferts de masse alors que les parois verticales sont maintenues à deux différentes températures ( $T_H > T_C$ ) et concentrations ( $C_L < C_H$ ) respectivement. La cavité contient un fluide Newtonien, incompressible, absorbant, émettant et non diffusant le rayonnement thermique.

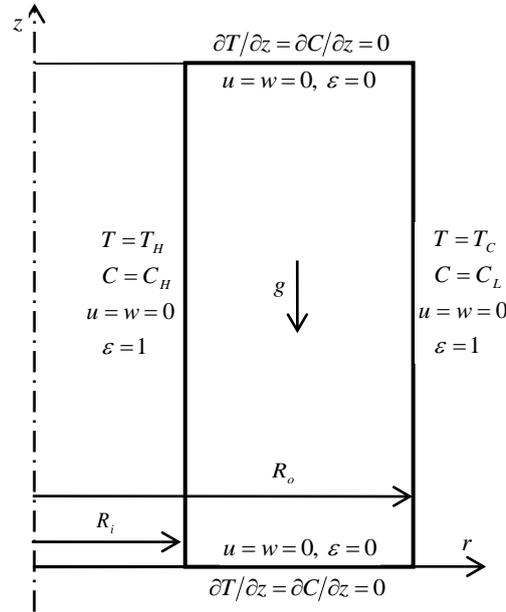


Figure 1 : modèle physique

## 3. Modèle mathématique et méthode numérique

### 3.1. Modèle mathématique

L'écoulement est bidimensionnelle laminaire en régime stationnaire avec une source de chaleur radiatif due à l'absorption/émission du fluide. On néglige les dissipations visqueuses et en se basant sur l'approximation de Boussinesq, les équations gouvernantes la convection naturelle de double diffusion en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g\beta_T(T - T_0) - g\beta_C(C - C_0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T + S_R \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \nabla^2 C \quad (5)$$

$$\omega = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (7)$$

Avec :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C}, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T}$$

Le terme source  $S_R$  est exprimé par la relation suivante :

$$S_R(r, z) = \kappa \left( \sum_{m=1}^{Nd} (w_m I_m(r, z)) - 4\sigma T^4 \right) \quad (8)$$

Où  $I_m(r, z)$  représente l'intensité radiative locale suivant la direction  $m$ . cette quantité est obtenue par la résolution de l'équation de transfert radiative (ETR) :

$$\frac{\mu_m}{r} \frac{\partial (r I_m(r, z))}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\eta_m I_m(r, z))}{\partial \varphi} + \xi_m \frac{\partial I_m}{\partial z} + \kappa I_m(r, z) = \kappa \sigma \frac{T^4(r, z)}{\pi} \quad (9)$$

### 3.2. Conditions aux limites

Initialement, le fluide est isotherme à la température moyenne  $T_0 = (T_H + T_C)/2$  et homogène à la concentration moyenne  $C_0 = (C_H + C_L)/2$ . Les conditions aux limites utilisées pour résoudre les équations gouvernantes sont :

- Paroi gauche,  $r = R_i$  et  $0 \leq z \leq H$  :

$$u = v = 0, \quad T = T_H$$

- Paroi droite,  $r = R_o$  et  $0 \leq z \leq H$  :

$$u = v = 0, \quad T = T_C$$

- Parois horizontaux :

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

Pour les conditions aux limites radiatives, les parois horizontales sont parfaitement réfléchissantes :

$$I_m(r, 0) = \frac{q_m^{inc}(r, 0)}{\pi}, \quad \text{pour } \eta_m > 0 \quad (10)$$

Avec :

$$q_m^{inc}(r, 0) = \sum_{\eta_m < 0} |\eta_m| w_m I_m(r, 0) \quad (11)$$

$$I_m(r, H) = \frac{q_m^{inc}(r, H)}{\pi}, \quad \text{pour } \eta_m < 0 \quad (12)$$

Avec :

$$q_m^{inc}(r, H) = \sum_{\eta_m > 0} |\eta_m| w_m I_m(r, H) \quad (13)$$

$q_m^{inc}(r, z)$  représente le flux radiatif incident vers la paroi.

Les parois verticales sont considérées comme des corps noirs dont l'intensité est :

$$I_m(R_i, z) = \frac{\varepsilon_p \sigma T_H^4}{\pi} \quad \text{pour } \mu_m > 0 \quad (14)$$

$$I_m(R_o, z) = \frac{\varepsilon_p \sigma T_C^4}{\pi} \quad \text{pour } \mu_m < 0 \quad (15)$$

### 3.3. Transfert de chaleur et de masse

Les nombres de Nusselt moyens (totale, convective et radiative) et le nombre de Sherwood moyen sont donnés par :

$$\overline{Nu}_t = \overline{Nu}_c + \overline{Nu}_{ray} \quad (14)$$

Avec :

$$\overline{Nu}_c = \frac{1}{A(T_H - T_C)} \int_0^H \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=Ri, Ro} dz \quad (14a)$$

Et :

$$\overline{Nu}_{ray} = \frac{1}{\lambda A(T_H - T_C)} \int_0^H |q_{ray}^{Net}|_{r=Ri, Ro} dz \quad (14b)$$

Où  $q_{ray}^{Net}$  est le flux radiatif net.

$$\overline{Sh} = \frac{1}{A(C_H - C_L)} \int_0^H \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=Ri, Ro} dz \quad (15)$$

### 3.4. Procédure numérique

Le modèle numérique utilisé pour la discrétisation des équations (1-5) est celui des volumes finis [13]. Les schémas des différences centrées et loi de la puissance sont utilisés pour les dérivées première et secondaire respectivement. Le système d'équations ainsi discrétisé est résolu moyennant l'algorithme SIMPLER et en utilisant la technique de balayage par ligne (combinaison entre algorithme de Tomas et méthode itérative de Gauss-Seidel).

Les calculs numériques ont été réalisés à l'aide d'un code écrit en langage Fortran. On suppose qu'il y a convergence vers une solution stationnaire, lorsque l'erreur relative, des variables primitives (u, w, T et C), entre deux itérations successives est inférieure à  $10^{-4}$ .

## 4. Résultats et discussion

### 4.1. Validation du code de calcul

Le code de calcul élaboré pour réaliser le présent travail a été validé en se référant à des travaux de recherche antérieurs. Nous avons commencé par le cas de la convection naturelle de double diffusion (sans rayonnement) dans des cavités carrée [1] et annulaire [3], puis, nous sommes passé au cas du rayonnement pure dans une cavité cylindrique [14] et finalement, nous avons validé le cas du couplage convection naturelle de double diffusion avec rayonnement volumique [8] et [9]. La validation est fondée sur la comparaison des nombres moyens de Nusselt et Sherwood (tableau 1-2). L'erreur moyenne enregistrée pour les nombres de Nusselt moyenne et Sherwood moyenne est de l'ordre de 1%.

Tableau 1 : comparaison convection naturelle double diffusive cavité annulaire

	Chen et al.[2]		Présent travail	
	Nu	Sh	Nu	Sh
A = 1.0, K = 1.5	6.60	8.35	6.69	8.72
A = 1.0, K = 2.0	6.84	8.70	6.72	8.74
A = 1.0, K = 3.0	7.01	8.84	6.87	8.85

Tableau 2 : comparaison convection naturelle double diffusive avec rayonnement cavité carré

$\tau_0$	Moufkir et al.[9]		Présent travail	
	$Nu_c$	$Nu_t$	$Nu_c$	$Nu_t$
0.1	21.59	56.35	21.67	56.88
1.0	21.82	48.06	22.02	48.80
5.0	19.81	35.81	19.87	36.05

## 4.2. Conditions de simulation

Les paramètres dimensionnelles géométriques utilisées pendant la simulation sont :  $A=1$  ( $H= \Delta R$ ),  $K=2$ , les températures imposées aux parois chaude et froide sont  $T^*_H= 0.5$  et  $T^*_C= -0.5$  respectivement. La concentration  $C^*_H= -0.5$  et  $C^*_L= 0.5$  sont imposées aux parois chaude et froide respectivement.

Le rapport des force de flottabilités pour le cas aidant est  $N= 4$  et pour le cas opposant est  $N= -4$ , les épaisseurs optiques utilisés sont :  $\tau_0 = 0$  (milieu transparent), 0.5 et 5. Les nombres de Prandtl, Rayleigh et Lewis utilisés sont  $Pr= 0.71$ ,  $Rat= 5.10^6$  et  $Le=1.0$  respectivement. Nous avons choisi une quadrature S8 pour résoudre l'équation de transfert radiatif (ETR) et un maillage non uniforme de (100x100).

Dans le but de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, on utilise les variables suivantes :

$$R = \frac{r - R_i}{\Delta R}, \quad Z = \frac{z}{H}, \quad T^* = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad C^* = \frac{C - C_0}{\Delta C}, \quad U = \frac{\Delta r}{\alpha \sqrt{Ra_t}} u, \quad W = \frac{\Delta r}{\alpha \sqrt{Ra_t}} w$$

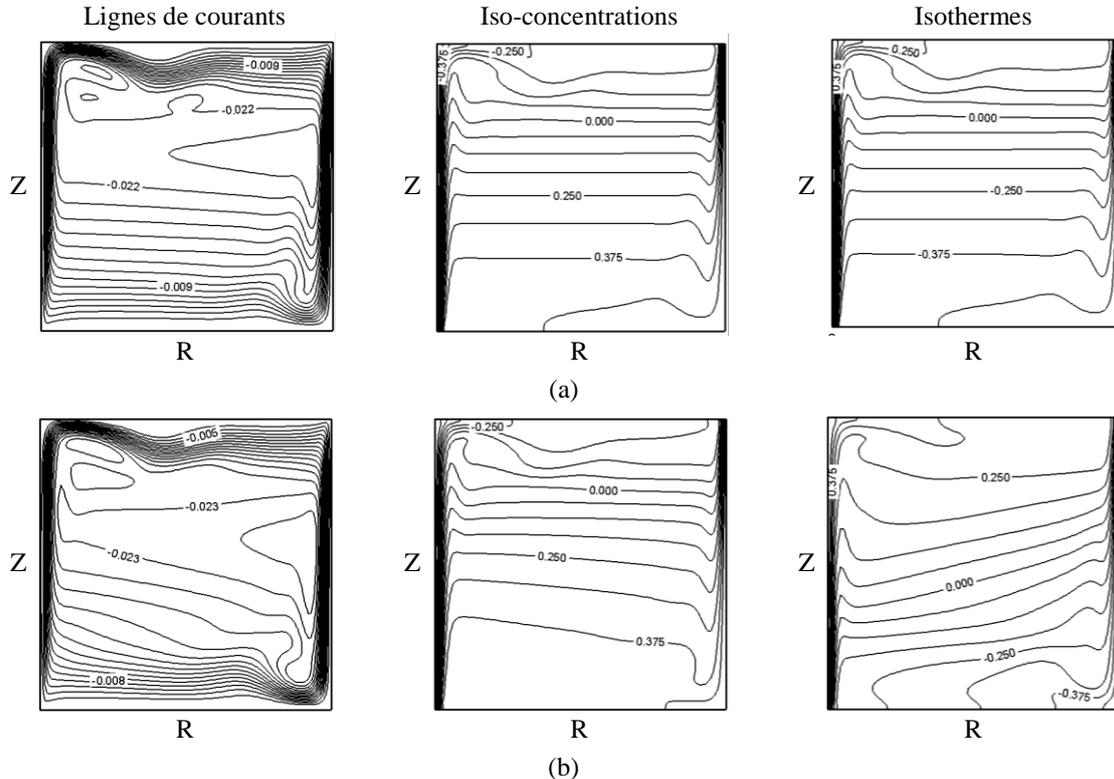
## 4.3. Cas aidant

Dans le cas d'écoulement aidant, les forces de flottabilités d'origines thermiques et massiques agissent dans le même sens (coopèrent). Cette configuration est obtenue en imposant la haute concentration ( $C_H$ ) à la paroi froide (paroi externe) et la basse concentration ( $C_L$ ) à la paroi chaude (paroi interne). Le rapport des forces de flottabilités  $N$  prend des valeurs positives.

Avec ou sans rayonnement, les forces massiques ( $N= 4$ ) dominent la dynamique du fluide dans l'espace annulaire en créant un écoulement monocellulaire dans le sens anti-trigonométrique avec l'apparition de petits tourbillons dans la cavité (fig. 2). Les forces thermiques renforcées par le rayonnement (près des parois) s'accumulent aux forces massiques dominantes et engendre une accélération des couches limites horizontales qui provoque l'inclinaison des lignes de courants au cœur de la cavité (fig. 4).

Le rayonnement volumique modifie légèrement les champs thermiques et massiques engendrant l'inclinaison des lignes iso-valeurs au cœur de la cavité. Les iso-concentrations au centre de la cavité sont peu inclinées à cause de l'accélération des couches limites (fig. 3b). Pour les champs de températures, le fluide échauffé par absorption dans la partie gauche (paroi interne) se refroidit par émission dans la partie droite (paroi externe) (fig. 3a), cette redistribution des températures associée à l'effet du rayonnement sur le champ dynamique entraîne une inclinaison et distorsion des isothermes.

L'augmentation de  $\tau_0$  modifie considérablement la distribution de la température (fig. 2c), elle se traduit par une augmentation de la température dans la cavité (fig. 3a) et une inclinaison plus importante des isothermes au cœur de l'espace annulaire. Concernant les champs de concentration, l'augmentation de  $\tau_0$  affecte légèrement les iso-concentrations (légère augmentation de la concentration au cœur de la cavité) (fig. 3b).



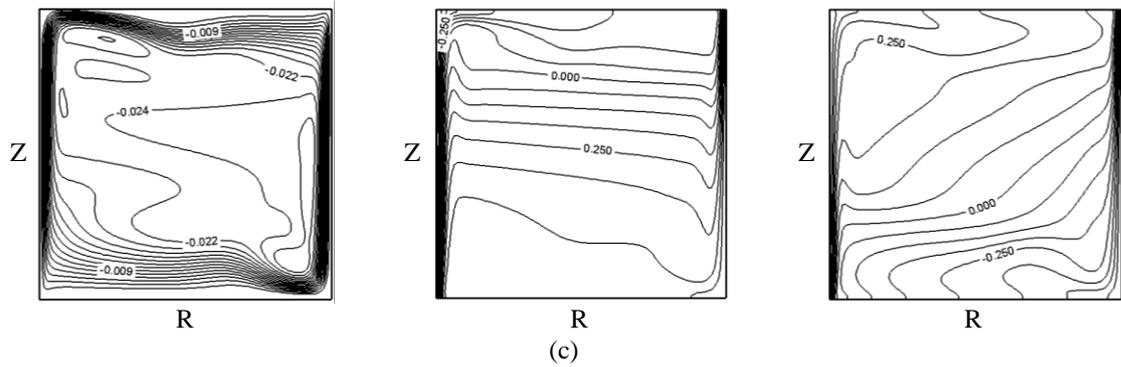


Figure 2 : lignes de courants, iso-concentrations et isothermes pour  $N=4$  : (a)  $\tau_0=0$  (b)  $\tau_0=0.5$  (c)  $\tau_0=5$ .

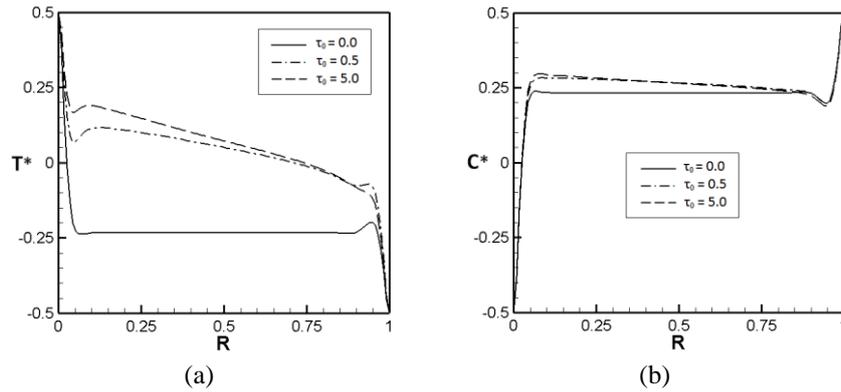


Figure 3 : profils de température (a) et de concentration (b) pour  $Z=0.5$  et  $N=4$ .

Avec l'augmentation de l'épaisseur optique  $\tau_0$  il y a accélération du fluide. Cette accélération est plus importante dans la partie inférieure ( $H < 0.5$ ) de l'espace annulaire que dans la partie supérieure ( $H > 0.5$ ) (fig.4).

La diminution du gradient de température sous l'effet du rayonnement volumique se traduit par la diminution des flux de chaleurs convectifs (Nuc) le long de la paroi active interne, tandis que le phénomène inverse se produit sur la paroi active externe. Le nombre de Nusselt convectif moyen diminue avec l'augmentation de l'épaisseur optique (fig. 5a). Contrairement au transfert de chaleur, le rayonnement n'a pratiquement aucun effet sur le transfert de masse (nombre de Sherwood moyen) (fig. 5b).

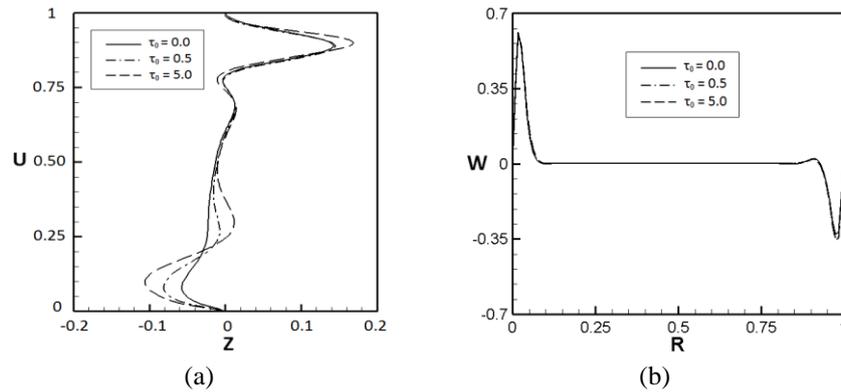


Figure 4 : Profils de vitesses horizontales à  $R=0.5$  (a) et verticales à  $Z=0.5$  pour  $N=4$ .

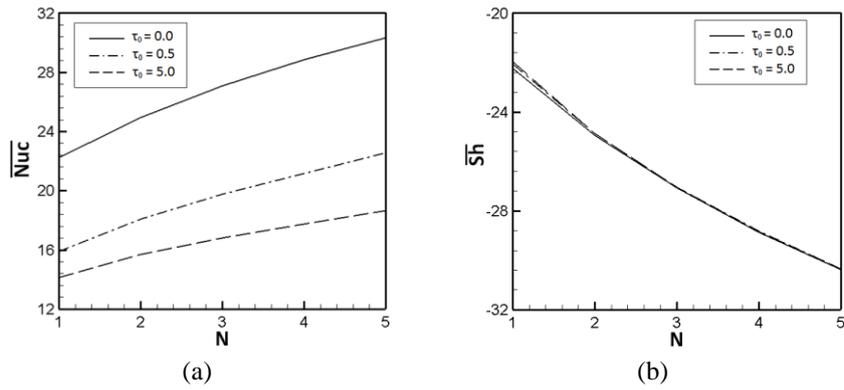


Figure 5 : Nombre de Nusselt moyen (a), et nombre de Sherwood moyen (b) en fonction du rapport des forces de poussées  $N$ .

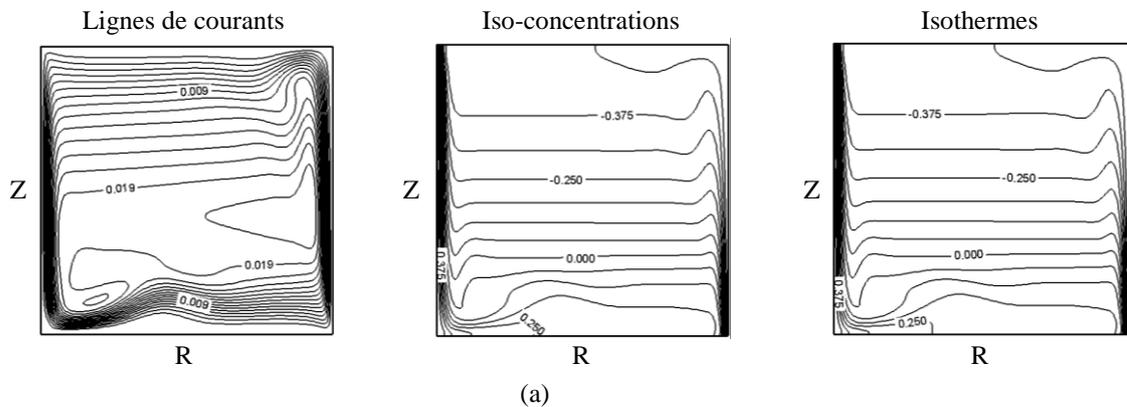
#### 4.4. Cas opposant

Dans le cas opposant, les forces de poussées d'origines thermiques et massiques agissent dans de sens contraires (s'opposent). Pour obtenir cette configuration, on impose la haute concentration ( $C_H$ ) à la paroi chaude (paroi interne) et la basse concentration ( $C_L$ ) à la paroi froide (paroi externe). Le rapport des forces de flottabilités  $N$  prend des valeurs négatives.

Dans les deux cas, avec ou sans rayonnement volumique, les force massique ( $N=-4$ ) dominant la dynamique du fluide dans l'espace annulaire en créant un écoulement monocellulaire dans le sens trigonométrique sauf pour le cas  $\tau_0 = 5$  où une petite cellule anti-trigonométrique se forme dans la partie haute droite de la cavité à cause des forces thermiques (fig. 6). Les forces thermiques renforcées par le rayonnement (près des parois) opposent aux force massiques dominantes et engendre un ralentissement des couches limites horizontales (fig. 8) qui provoque l'inclinaison des lignes de courants au cœur de la cavité.

Le rayonnement volumique modifie sensiblement les champs thermiques et massiques engendrant l'inclinaison des lignes iso-valeurs au cœur de la cavité. Les iso-concentrations au centre de la cavité sont inclinées à cause des gradients horizontaux négatifs de concentrations (de la paroi interne vers la paroi externe), un excès de concentration est localisé près de la paroi chaude et un déficit près de la paroi froide (fig. 7b). Même raisonnement pour les isothermes, l'inclinaison au centre de la cavité est due aux gradients horizontaux de températures négatives. Le fluide échauffé par absorption dans la partie gauche (paroi interne) se refroidit par émission dans la partie droite (paroi externe) (fig. 7a).

L'augmentation de  $\tau_0$  modifie considérablement la distribution de la température (fig. 6c), elle se traduit par une augmentation de la température dans la cavité (fig. 7a) et une inclinaison de plus en plus importante des isothermes au cœur de l'espace annulaire. L'augmentation de  $\tau_0$  affecte sensiblement les champs de concentration, l'inclinaison des iso-concentrations est plus importante dans la partie haute de la cavité ( $H > 0.5$ ) et moins importante en bas de la cavité ( $H < 0.5$ ) (fig. 3b).



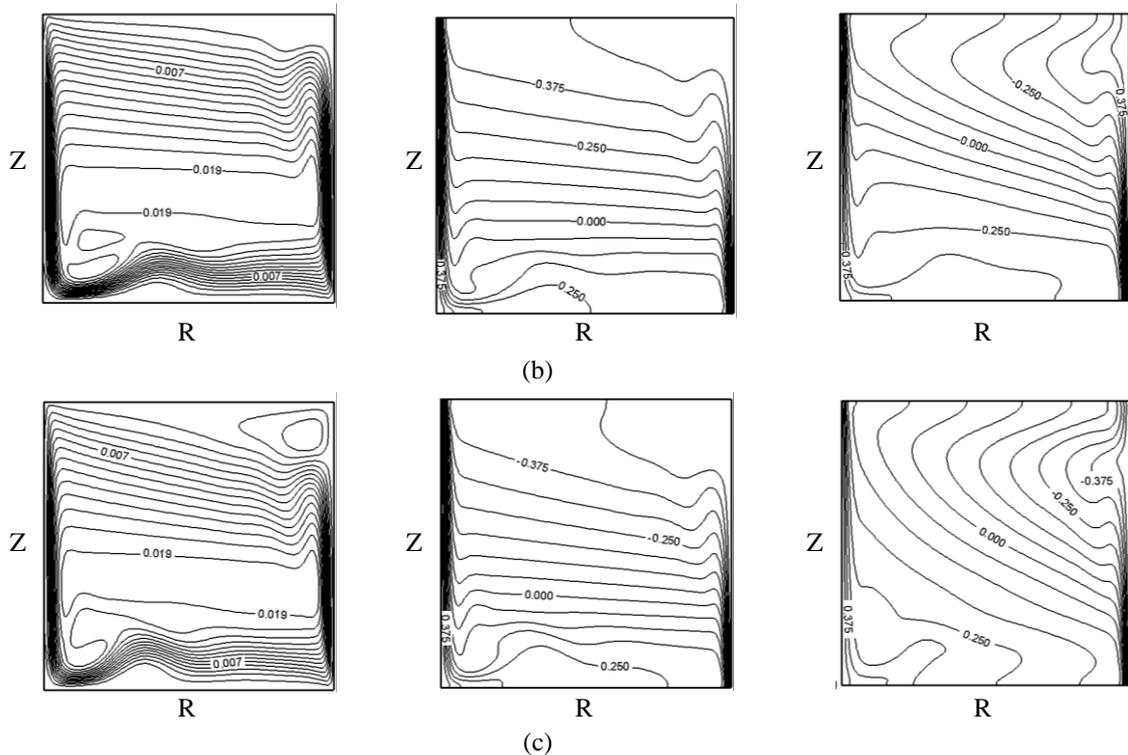


Figure 6 : lignes de courants, iso-concentrations et isothermes pour  $N = -4$  : (a)  $\tau_0 = 0$ , (b)  $\tau_0 = 0.5$  (c)  $\tau_0 = 5$ .

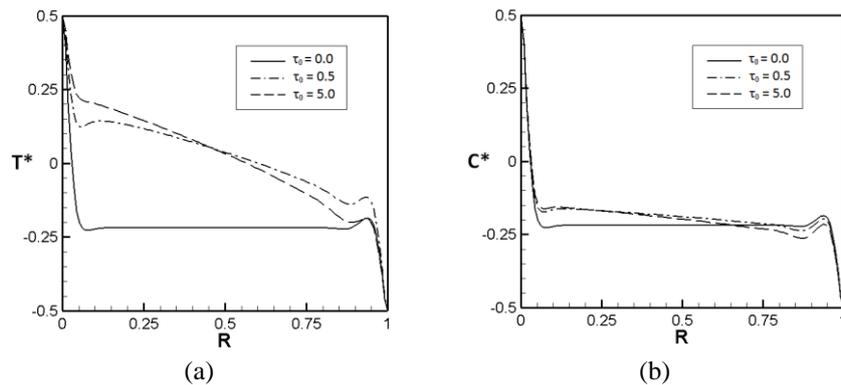


Figure 7 : profils de température (a) et de concentration (b) en  $Z = 0.5$  pour  $N = -4$ .

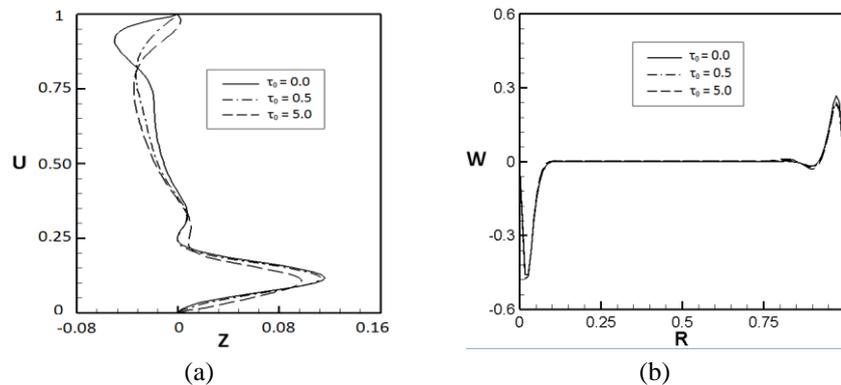


Figure 8 : Profils de vitesses horizontales en  $R = 0.5$  (a) et verticales en  $Z = 0.5$  pour  $N = 4$ .

Sous l'effet du rayonnement volumique, le flux de chaleur convectif ( $N_{uc}$ ) le long de la paroi active interne diminue à cause de la diminution du gradient de température et inversement pour la paroi externe où l'augmentation du flux de chaleur est due à l'augmentation du gradient de température.. Lorsque ( $N < -1.4$ ), Le nombre de Nusselt convectif moyen à la paroi chaude diminue avec l'augmentation de l'épaisseur optique (fig. 9a) et si  $N > -1.4$ , Le nombre de Nusselt convectif moyen à la paroi chaude augmente avec l'augmentation de



C	froid	m	direction de propagation
H	chaud	0	valeur de référence
I	interne		
O	externe		

## Références

- [1] C. Béghein, F. Haghigat, F. Allard, Numerical study of double diffusive natural convection in a square cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, volume 35, pages 833-846, 1992.
- [2] P. W. Shipp, M. Shoukri, M. B. Carver, Double-Diffusive Natural Convection in a Closed Annulus, *Numerical Heat Transfer, Part A* 24, pages 339-356, 1993.
- [3] S. Chen, J. Tölke, M. Krafczyk, Numerical investigation of double-diffusive (natural) convection in vertical annuluses with opposing temperature and concentration gradients, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, volume 31, pages 217-226, 2010.
- [4] G. Lauriat, Combined radiation-convection in gray fluids enclosed in vertical cavities, *J. Heat Transf.*, volume 104, pages 609-615, 1982.
- [5] A. Yucel, S. Acharya, M.L. Williams, Natural convection and radiation in a square enclosure, *Numer. Heat Transf. part A* 15, pages 261-278, 1989.
- [6] C. Balaji, S.P. Vankateshan, Combined conduction, convection and radiation in a slot, *Int. J. Heat Fluid Flow*, volume 16, pages 139-144, 1995.
- [7] M.N. Borjini, H. Ben Aissia, K. Halouani et B. Zeghmami, Effect of optical properties on oscillatory hydromagnetic double-diffusive convection within a semitransparent fluid, *Int. J. Heat Mass Transf.* volume 49, pages 3984-3996, 2006.
- [8] A. Mezrhab, D. Lemonnier, S. Meftah, A. Benbrik, Numerical study of double diffusion convection coupled to radiation in a square cavity filled with a participating grey gas, *J. Phys. D Appl. Phys.*, volume 41, pages 195501, 2008.
- [9] F. Moufekkik, M.A. Moussaoui, A. Mezrhab, H. Naji et M. Bouzidi, Numerical study of double-diffusive convection in presence of radiating gas in a square cavity, *Fluid Dyn. Mater. Process.* Volume 8, pages 129-153, 2012.
- [10] S. Meftah, A. Ibrahim, D. Lemonnier, A. Benbrik, Coupled radiation and double diffusive convection in non-gray air-CO<sub>2</sub> and air-H<sub>2</sub>O mixtures in cooperating situations, *Numer. Heat Transfer, Part A* 56, pages 1-19, 2009.
- [11] A. Ibrahim, D. Lemonnier, Numerical study of coupled double diffusive natural convection and radiation in a square cavity filled with a N<sub>2</sub>-CO<sub>2</sub> mixture, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 36, 197-202, 2009.
- [12] S. Laouar-Meftah, M. Cherifi, D. Lemonnier, A. Benbrik, Gas radiation effects on opposing double-diffusive convection in a non-gray air-H<sub>2</sub>O mixture, *International Journal of Thermal Sciences*, volume 77, pages 38-46, 2014.
- [13] S.V. Patanker, Numerical heat transfer and fluid flow, *Londres: Mac Graw Hill*, 197, 1980.
- [14] M. Y. Kima, S. W. Baekb, Modeling of radiative heat transfer in an axisymmetric cylindrical enclosure with participating medium, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, volume 90, pages 377-388, 2005.