

# EFFET DE LA FORME GEOMETRIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES SUR LE TRANSFERT DE CHALEUR.

S. HANINI<sup>1</sup>, M. N. BOUAZIZ<sup>2</sup>

1,2. Centre Universitaire de Médéa, Quartier Aïn d'Heb, 26000 Médéa.

1. Tél.: 025.58.41.62. Email: [s\\_hanini2002@yahoo.fr](mailto:s_hanini2002@yahoo.fr)

## RESUME

Les matériaux composites pendant ces dernières années ont connu une rapide évolution dans les différents secteurs de l'industrie de pointe notamment en aérospatiale et en aéronautique.

Pour un bon fonctionnement et sans ris que de défaillances d'un véhicule spatial ou d'un avion, il est nécessaire de prévoir à court ou à long terme avec des modèles physiques simples, le comportement de la stabilité de la structure de ces matériaux composites vis-à-vis de la géométrie et des différents paramètres gouvernants l'environnement. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés au transfert thermique dans les matériaux composites. Des solutions analytiques ont été proposées donnant la température réduite en fonction du temps réduit et de la position réduite, en tenant compte de la géométrie de la pièce et des conditions aux limites, avec illustrations des exemples traités.

**Mots clés:** Matériaux composites, bilan thermique, grandeurs réduites, transfert de chaleur, transformées de Laplace, modélisation.

## 1. NOMENCLATURE

| Grandeur   | Définition  | Unité                               |
|--|---|-------------------------------------|
| a  | demie longueur de la plaquette  | m                                   |
| b  | demie épaisseur de la plaquette   | m                                   |
| cp   | chaleur massique  | J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> |
| dv   | élément de volume différentiel  | m <sup>3</sup>                      |
| $(Fo)_j = \frac{\mathbf{a} \cdot t}{\mathbf{x}^2}$                     | nombre de Fourier { $(Fo)_l = \frac{\mathbf{a} \cdot t}{L^2}$ : Fo longitudinal et $(Fo)_r = \frac{\mathbf{a} \cdot t}{R^2}$ : Fo radial }                        | 1                                   |
| J <sub>0</sub> (a)   | fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro   | 1                                   |
| K  | conductivité thermique du solide  | W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>  |
| L  | demie hauteur de la plaquette   | m                                   |
| r  | coordonnée radiale  | m                                   |
| R  | rayon extérieur du cylindre et/ou de la sphère  | m                                   |
| t  | temps nécessaire au transfert   | s                                   |
| T  | température   | K                                   |
| T <sub>p</sub>   | température de la paroi   | K                                   |
| T <sub>0</sub>   | température initiale  | K                                   |
| T <sub>8</sub>   | température de l'atmosphère environnante agitée   | K                                   |
| x  | coordonnée axiale   | m                                   |
| X <sub>j</sub>   | $X_j = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{x}}$ grandeur réduite { X <sub>1</sub> = x / L: longitudinale et X <sub>1</sub> = r / R : radiale }                              | 1                                   |
| a  | $\mathbf{a} = \frac{k}{\mathbf{r} \cdot c_p}$ : diffusivité thermique   | m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>     |
| a <sub>1</sub> , a <sub>1</sub> , a <sub>1</sub> , ..., a <sub>n</sub> | racines positives de J <sub>0</sub> (a) = 0   | 1                                   |
| β  | constante dépendante de la géométrie du composite (β = 0 pour une géométrie linéaire, β = 1 pour une géométrie cylindrique et β = 2 pour une géométrie sphérique) |                                     |
| ?  | température réduite : $\mathbf{q} = \frac{T - T_0}{T_p - T_0}$  | 1                                   |
| ?  | masse volumique du matériau   | kg.m <sup>-3</sup>                  |
| ?  | débit de production et/ source volumique de chaleur   | W.m <sup>-3</sup>                   |
| ?  | coordonnée de l'espace (? = x : axiale et ? = r : radiale)  | m                                   |

# 1. INTRODUCTION

On trouve beaucoup de travaux dans la littérature concernant le transfert thermique dans les matériaux composites du fait de l'intérêt économique mis en jeu. Les auteurs dans [1 - 5] ont apporté des solutions pour différentes conditions d'environnement. D'autres [6 - 12] ont présenté des solutions en recourant à des techniques numériques diverses. Dans le présent travail, le problème est formulé en tenant compte de l'effet de la forme géométrique de la pièce avec les conditions aux limites appropriées. Après la formulation mathématique, quatre géométries ont été retenues (semi infinie, plaque, sphère et cylindre) et discutés selon les solutions existantes dans la littérature [13-15].

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

### 2.1. Modèle physique

Le matériau composite a une température initiale ( $T_0$ ), il se trouve dans une atmosphère environnante agitée de température ( $T_8$ ), [3, 13, 14, 17].

### 2.2. Hypothèses simplificatrices

Afin d'alléger et de simplifier la quantification mathématique, les hypothèses simplificatrices suivantes sont nécessaires, [3, 13 - 17]:

- Absence de transfert de masse à l'intérieur du composite et/ou avec le milieu extérieur.
- Le solide est considéré comme indéformable au cours du temps.
- La distribution de la température initiale est uniforme dans le composite.
- Le transfert est monodimensionnel.
- Les propriétés physiques du composite et/ou du fluide sont indépendantes de la température, l'espace et le temps.

### 2.3. Modèle mathématique

Il a pour objectif la détermination durant le processus les distributions des températures à l'intérieur du composite de géométrie simple finie. Il repose sur le bilan thermique dans un élément de volume différentiel ( $dv$ ) du solide :

$$\left( \begin{array}{l} \text{Flux de chaleur qui} \\ \text{entre dans } (dv) \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Flux de chaleur} \\ \text{qui sort dans } (dv) \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Flux de chaleur qui} \\ \text{s'accumule dans } (dv) \end{array} \right) \pm \left( \begin{array}{l} \text{Flux de chaleur dû à la} \\ \text{production interne dans } (dv) \end{array} \right) = 0$$

L'équation générale de transfert de chaleur pour différentes géométries du composite peut se mettre sous la forme:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Terme} \\ \text{d'accumulation} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Terme de} \\ \text{conduction} \end{array} \right) \pm \left( \begin{array}{l} \text{Terme de} \\ \text{production} \end{array} \right) = 0$$

Soit:

$$\frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - \mathbf{a} \cdot \left[ \frac{\partial^2 T(\mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}^2} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}} \right] \pm \frac{\Psi}{\mathbf{r} \cdot c_p} = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) peut se mettre sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{q}(X_j, Fo_j)}{\partial Fo_j} - \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{q}(X_j, Fo_j)}{\partial X_j^2} - \frac{\mathbf{b}}{X_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}(X_j, Fo_j)}{\partial X_j} \right] \pm \frac{\mathbf{x}^2}{k \cdot (T_p - T_0)} \Psi = 0 \quad (2)$$

## 3. FORMULATION ANALYTIQUE

### 3.1. Géométrie semi infinie

Nous assimilons le solide (composite) à une tranche semi infinie, l'équation (2) selon les hypothèses simplificatrices, les conditions aux limites et la condition initiale s'écrit:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{q}(X_l, Fo_l)}{\partial X_l^2} - \frac{\partial \mathbf{q}(X_l, Fo_l)}{\partial (Fo_l)} = 0 \\ \mathbf{q}(X_l, Fo_l) \Big|_{Fo_l=0}^{X_l > 0} = 0 \\ \mathbf{q}(X_l, Fo_l) \Big|_{Fo_l > 0}^{X_l = 0} = 1 \\ \mathbf{q}(X_l, Fo_l) \Big|_{Fo_l > 0}^{X_l \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

La solution du système (3) après introduction des transformées de Laplace donne la température réduite :

$$q(X_L, Fo_l) = \operatorname{erfc}\left(\frac{X_l}{2\sqrt{Fo_l}}\right) \quad (4)$$

Afin de simuler la distribution de la température réduite (eq.4), on discute deux cas:

**1<sup>er</sup> cas:** On fixe le nombre de Fourier longitudinal ( $Fo_l$ ), et on calcule la température réduite (?) pour différentes profondeurs longitudinales réduites (figure 1)

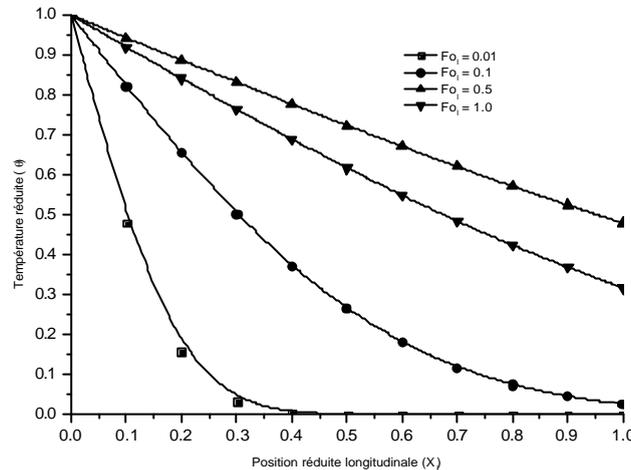


Figure 1. Variation de la température réduite en fonction de la position réduite longitudinale pour différentes valeurs du nombre de Fourier (cas d'une tranche semi infinie).

**2<sup>ème</sup> cas:** On fixe la position réduite longitudinale ( $X_l$ ) et on calcule la température réduite (?) pour différents nombres de Fourier longitudinaux ( $Fo_l$ ) (figure 2)

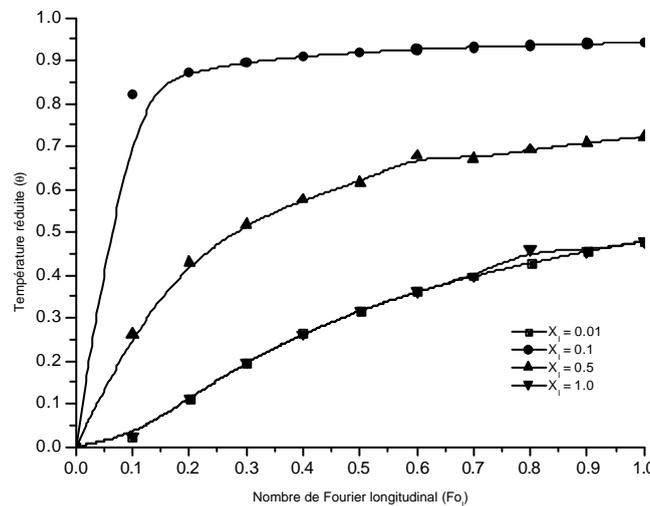


Figure 2. Variation de la température réduite en fonction du nombre de Fourier pour différentes valeurs de la position réduite longitudinale (cas d'une tranche semi infinie).

### 3.2. Géométrie sous forme d'une plaquette

Le composite supposé ici a une forme d'une plaquette de longueur ( $2a$ ), une épaisseur ( $2b$ ) et une hauteur ( $2L$ ), le système à résoudre (2) selon les hypothèses simplificatrices, les conditions aux limites et la condition initiale prend la forme suivante:

$$\left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{q}(X_l, Fo_l)}{\partial X_l^2} - \frac{\partial \mathbf{q}(X_l, Fo_l)}{\partial (Fo_l)} = 0; \mathbf{q}(X_l, Fo_l) \Big|_{Fo_l=0}^{X_l > 0} = 0; \mathbf{q}(X_l, Fo_l) \Big|_{Fo_l > 0}^{X_l=1} = 1 \text{ et } \frac{\partial \mathbf{q}(X_l, Fo_l)}{\partial X_l} \Big|_{Fo_l=0}^{X_l=1} = 0 \right\} \quad (5)$$

La solution du système (5) donne :

- En introduisant les transformées de Laplace :

$$\mathbf{q}(X_l, Fo_l) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \frac{(2n+1) - X_l}{2\sqrt{Fo_l}} \right] + \operatorname{erfc} \left[ \frac{(2n+1) + X_l}{2\sqrt{Fo_l}} \right] \right\} \quad (6)$$

- En utilisant la méthode de séparation des variables :

$$\mathbf{q}(X_l, Fo_l) = 1 - \frac{4}{\mathbf{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)} \cos \left( \frac{(2n+1)\mathbf{p}}{2} X_l \right) \cdot \exp \left( -\frac{(2n+1)^2 \mathbf{p}^2}{4} Fo_l \right) \right\} \quad (7)$$

Les résultats de calcul de l'équation (6) et/ou (7) sont illustrés sur la figure 3 et 4.

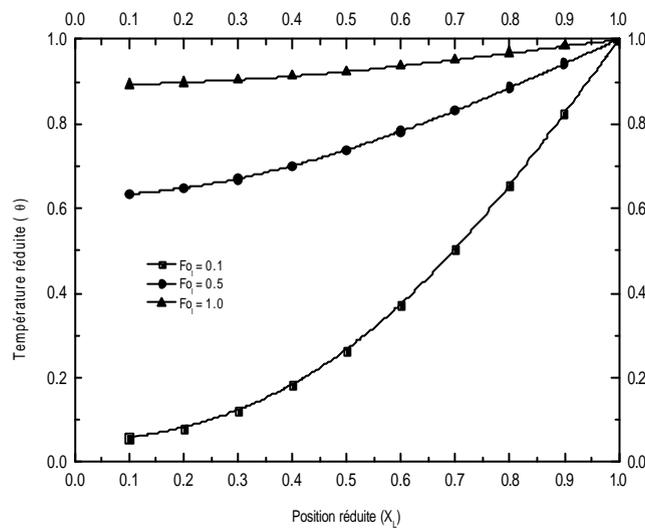


Figure 3. Variation de la température réduite en fonction de la position réduite longitudinale pour différentes valeurs du nombre de Fourier (cas d'une plaque).

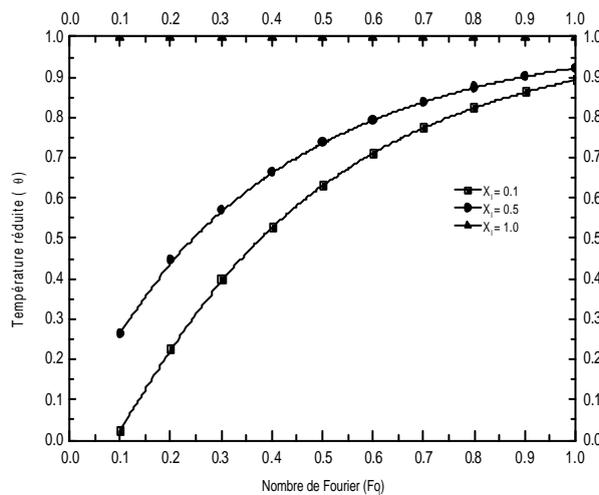


Figure 4. Variation de la température réduite en fonction du nombre de Fourier pour différentes valeurs de la position réduite longitudinale (cas d'une plaque).

### 3.3. Géométrie sphérique

Le matériau solide ici est supposé sous forme sphérique, l'équation (2) selon les mêmes conditions précédentes peut s'écrire en coordonnées sphériques adimensionnelles:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X_r^2} \frac{\partial}{\partial X_r} \left( X_r^2 \frac{\partial q(X_r, Fo_r)}{\partial X_r} \right) - \frac{\partial q(X_r, Fo_r)}{\partial Fo_r} &= 0 \\ q(X_r, Fo_r) \Big|_{0 \leq X_r \leq 1}^{Fo_r=0} &= 0 \\ q(X_r, Fo_r) \Big|_{X_r=1}^{Fo_r=0} &= 1 \\ q(X_r, Fo_r) \Big|_{X_r=0}^{Fo_r>0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La solution du système (8) en utilisant les transformées de Laplace donne:

$$q(X_r, Fo_r) = 1 + \frac{2}{p X_r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \sin(n p X_r) \cdot \exp(n^2 p^2 Fo_r) \right\} \quad (9)$$

La simulation de la température réduite de l'équation (9) est donnée sur les figures (5) et (6)

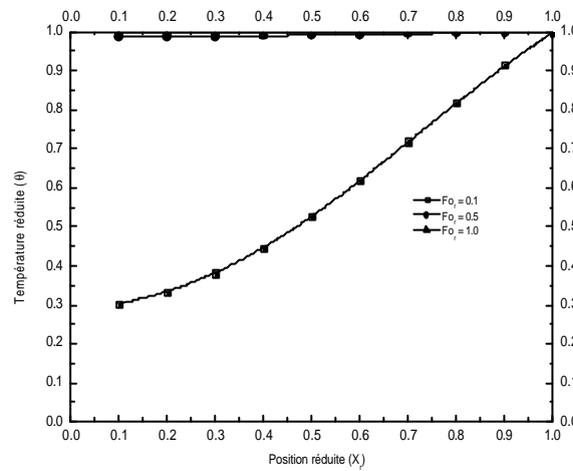


Figure 5. Variation de la température réduite en fonction de la position réduite radiale pour différentes valeurs du nombre de Fourier (cas d'une sphère).

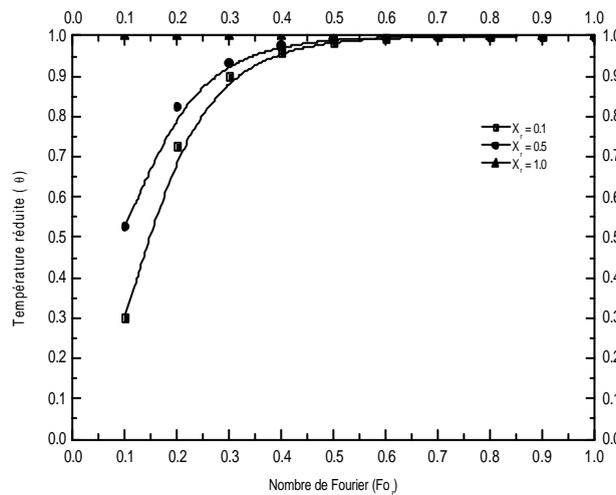


Figure 6. Variation de la température réduite en fonction du nombre de Fourier pour différentes valeurs de la position réduite radiale (cas d'une sphère).

### 3.4. Géométrie cylindrique

Le composite est supposé avoir une forme cylindrique, l'équation (2) selon les hypothèses simplificatrices, les conditions aux limites et la condition initiale prend la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X_r} \frac{\partial}{\partial X_r} \left( X_r \cdot \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{q}(X_r, Fo_r)}{\partial X_r} \right) - \frac{\partial \mathbf{q}(X_r, Fo_r)}{\partial Fo_r} &= 0 \\ \mathbf{q}(X_r, Fo_r) \Big|_{0 \leq X_r \leq 1}^{Fo_r=0} &= 0 \\ \mathbf{q}(X_r, Fo_r) \Big|_{X_r=1}^{Fo_r>0} &= 1 \\ \mathbf{q}(X_r, Fo_r) \Big|_{X_r=0}^{Fo_r>1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

La solution du système (10) après introduction des transformées de Laplace donne:

$$\mathbf{q}(X_r, Fo_r) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_0(\mathbf{a}_n \cdot X_r)}{\mathbf{a}_n \cdot J_1(\mathbf{a}_n)} \cdot \exp(\mathbf{a}_n^2 \cdot Fo_r) \right\} \quad (11)$$

Les résultats de calcul de l'équation (11) sont illustrés sur la figure (7) et (8).

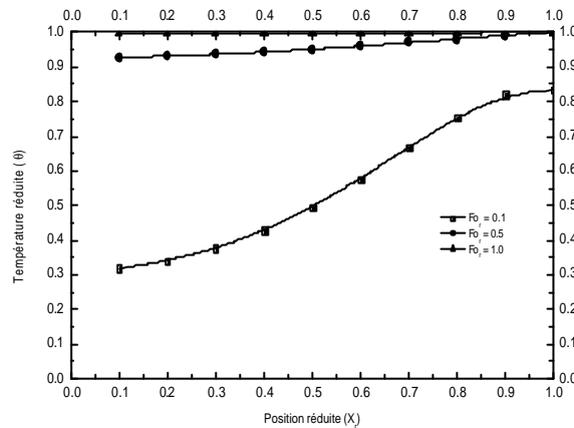


Figure 7. Variation de la température réduite en fonction de la position réduite radiale pour différentes valeurs du nombre de Fourier (cas d'un cylindre).

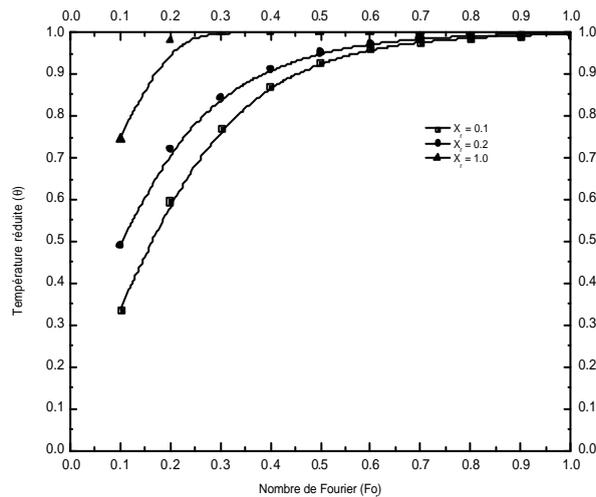


Figure 8. Variation de la température réduite en fonction du nombre de Fourier pour différentes valeurs de la position réduite radiale (cas d'un cylindre).

## 4. COMPARAISON

Afin de mieux illustrer l'effet de la géométrie du composite sur le transfert de chaleur, on trace sur le même graphe pour les trois formes géométriques retenues (plaquette, sphère et cylindre) la température réduite en fonction du nombre de Fourier en fixant la position réduite (Figure 9), puis la température réduite en fonction la position réduite en fixant le nombre de Fourier (Figure 10)

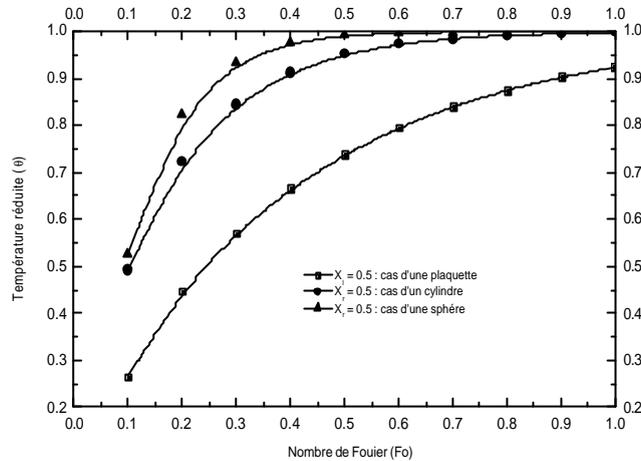


Figure 9. Effet de la géométrie du composite sur le transfert de chaleur (cas où  $X_j = 0.5$ ).

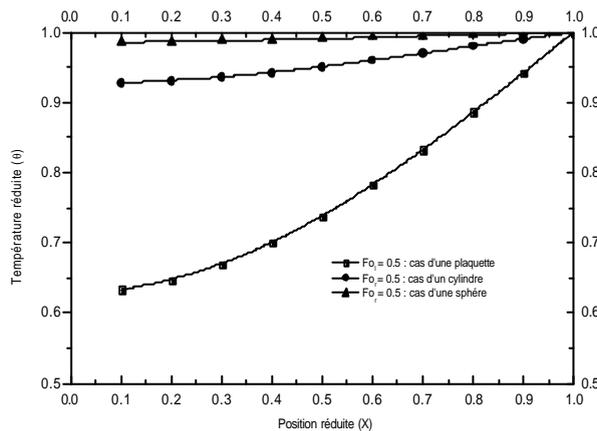


Figure 10. Effet de la géométrie du composite sur le transfert de chaleur (cas où  $X_j = 0.5$ ).

## 5. CONCLUSION

L'analyse des résultats obtenus, montre d'une part que le choix de la géométrie du matériau composite est primordial et d'autre part que:

- pour une position réduite fixe, plus le temps de conduction est prolongé, plus la température réduite est élevée.
- pour un temps réduit fixe, une diminution de la position réduite entraîne une augmentation de la température réduite.
- pour le même temps et position réduite, la température réduite est nettement améliorée en terme de réduction de transfert de chaleur si la géométrie du matériau composite se rapproche de la forme d'une plaquette autrement dit que les formes qui se rapprochent de la forme parallélépipédique sont plus avantageuses que les autres formes.

## REFERENCES

- [1] M. Bentchikou et col. "*Conductivité thermique d'un nouveau matériau composite à matrice organique et fibres cellulosiques: Mesure par la méthode sonde à choc thermique et interprétation*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [2] A. Hgaza et col. "*Mesure des caractéristiques thermo physiques des plaques minces*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [3] S. Hanini et col. "*Etude expérimentale et modélisation de la conductivité thermique de luffa cylindrica*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [4] J. Khemeri et col. "*Simulation numérique et expérimentale du séchage en vapeur d'eau surchauffée d'un milieu granulaire fixe*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [5] C.J. Moore, "*Heat transfer across surfaces in contact: Studies of transients in one-dimensional composite systems*", Southern Methodist Univ., Thermal/Fluid Sci. Ctr. Res. Rep. 67-2, Dallas, Tex., March 1967.
- [6] C.B. Kheder et col. "*Transferts de chaleur dans un milieu semi transparent en régime transitoire*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [7] S. Bouzid et col. "*Etude et calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la méthode des élément finis*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [8] N. N Daouas et col. "*Application d'une méthode inverse associée à une technique de lissage pour la détermination simultanée d'une température et d'un flux de chaleur surfaciques transitoires*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [9] M.Z. Debbal et col. "*Résolution de la conduction thermique par la méthode probabiliste de Monte-Carlo*", 10<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, 17-21 Septembre 2001, La Marsa Tunisie, 2001.
- [10] V.R. Voller and al.. "*A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase change problems*". Int. J. of Heat and Mass Transfer, vol.30 (10), pp. 2161-2170, 1987.
- [11] S. Volz "*Transfert de chaleur au temps ultra courts par la technique de la dynamique moléculaire*", Revue Générale de Thermique, vol.36, n°11, Décembre, 1997.
- [12] Springer G.S, "*Numerical procedures for the solution of one dimensional Fickian diffusion problems*", Edited G.S. Springer, Technomic, pp. 166-176, 1981.
- [13] Carslaw H.S. and Jaeger "*Conduction of Heat in Solids*", 2<sup>nd</sup> ed. Oxford University Press, London, 1959.
- [14] Crank, J. "*The Mathematics of diffusion*", Oxford University Press, London, second Edition 1975.
- [15] Churchill, R.V. "*Operational Mathematics*", 2<sup>nd</sup> ed. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [16] M.P. Heisler "*Temperature charts for induction and constant temperature heating*". Trans. ASME, vol.69, pp.227-236, 1947.
- [17] L.S. Langston, "*Heat transfer from multidimensional objects using one-dimensional solutions for heat loss*", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 25, p. 149, 1982.