

**METHODE DE SIMULATION PAR FERMETURE
AU SECOND ORDRE
D'UNE COUCHE DE MELANGE COMPRESSIBLE**

Hamed Merzougui, Hechmi Khelifi, Taïeb Lili
Département de Physique, Faculté des Sciences de Tunis,
Campus Universitaire, 1060, Tunis, Tunisie

Résumé

Un modèle au second ordre utilisant la méthode statistique de Favre est employé en vue de prévoir numériquement le développement d'une couche de mélange évoluant en présence d'une turbulence compressible. L'idée de base réside dans la correction de la partie de retour à l'isotropie du modèle classique développé par Launder, Reece et Rodi exprimant la corrélation pression-déformation. Cette correction qui s'appuie sur la divergence non nulle de la fluctuation de vitesse, a permis d'exprimer le tenseur de corrélation pression-déformation en fonction du nombre de Mach turbulent. La validité de cette nouvelle formulation du modèle au second ordre est testée par référence aux résultats expérimentaux de Goebel et al.

Mots clés: turbulence compressible, couche de mélange, corrélation pression-déformation

NOMENCLATURE

x : coordonnée longitudinale

y : coordonnée transversale

$\eta = (y - y_0)/\delta$: coordonnée transversale sans dimension

\tilde{U} et \tilde{V} : composante longitudinale et transversale de la vitesse moyenne

$\Delta U = U_1 - U_2$: différence entre les vitesses U_1 et U_2

y_p : coordonnée transversale où $\tilde{U} = U_1 - 0.1\Delta U$

y_s : coordonnée transversale où $\tilde{U} = U_1 + 0.1\Delta U$

$y_0 = (y_p + y_s)/2$: milieu de y_p et y_s

$\delta = y_p - y_s$: épaisseur de la couche de mélange compressible

c : vitesse du son

$M_c = \Delta U/2c$: nombre de Mach convectif

M_t : nombre de Mach turbulent

1. INTRODUCTION

Les écoulements turbulents compressibles interviennent dans un grand nombre de cas industriels. On rencontre plus particulièrement ces écoulements dans les domaines de l'aéronautique, des compresseurs, de la combustion, de l'environnement, etc...

Dans le cadre général de la turbulence compressible, le phénomène de compressibilité a été largement analysé dans la littérature. Dans ce contexte, les résultats de simulation numérique directe[1] ont montré un effet prépondérant du nombre de Mach turbulent sur l'évolution de la turbulence homogène cisailée. Ainsi dans le même esprit, les mesures effectuées par Samimy et al.[2] et Goebel et al.[3] ont montré que le nombre de Mach convectif a des effets notables sur l'élargissement de la couche de mélange compressible. Sur un plan fondamental, il apparaît nécessaire de bien comprendre les effets induits par la compressibilité et de développer des modèles capables de les prédéterminer correctement. Jusqu'à maintenant le schéma le plus largement utilisé pour la prévision numérique des écoulements turbulents compressibles (Speziale et al.[4],Launder et al[5]) est le schéma de Favre[6] qui est basée sur l'utilisation d'une moyenne pondérée par la masse. Cette moyenne a l'avantage de fournir des équations identiques au cas incompressible. Pour les écoulements turbulents compressibles, la masse volumique est variable, les équations décrivant ce type d'écoulements relèvent du couplage entre celles relatives au champ dynamique et l'équation de conservation de l'énergie. Classiquement , ce couplage se fait à travers l'équation d'état des gaz parfaits.

Cette étude a pour objet la prévision numérique d'une couche de mélange compressible à l'aide d'un modèle au second ordre de Favre. Une forme corrigée du modèle classique de Launder, Reece et Rodi[7] pour la partie de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation est proposée. Ce modèle corrigé est explicité en fonction du nombre de Mach turbulent. Cette correction conserve l'universalité du modèle incompressible dans le cas limite où le nombre de Mach turbulent est nul.

Pour valider l'approche de la modélisation adoptée dans cette étude, nous comparons les résultats numériques obtenus avec les résultats expérimentaux de Goebel et al.[3].

2.FORMULATION DU TENSEUR DE CORRELATION PRESSION-DEFORMATION

La décomposition classique de la fluctuation de pression en parties lente p'_s et partie rapide p'_r peut être extrapolée aux écoulements compressible et permet la décomposition des corrélations pression-déformation et pression-dilatation comme suit:

$$\begin{aligned}\phi_{ij} &= \phi_{ij}^s + \phi_{ij}^r \\ \overline{p' d'} &= \overline{(p' d')}_s + \overline{(p' d')}_r\end{aligned}$$

Les termes ϕ_{ij}^s , ϕ_{ij}^r représentent respectivement les parties de retour à l'isotropie et linéaire de la corrélation pression-déformation. Nous allons proposer une méthode de modélisation pour la partie de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation dans le cadre d'une turbulence compressible. Cette méthode est basée sur la divergence non nulle de la fluctuation de vitesse. Commençons

d'abord par rappeler la formulation générale retenue par Pope [8]:

$$\frac{\phi_{ij}^s}{\bar{\rho}} = \left(\frac{2}{3} + C_0\right)\epsilon_s \delta_{ij} + G_{il}\overline{u_l u_j} + G_{jl}\overline{u_l u_i}, G_{ij} = \frac{\epsilon_s}{k}(\alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 b_{ij} + \alpha_3 b_{ij}^2) \quad (1)$$

La contraction $i=j$ opérée sur (1) conduit à:

$$\frac{\phi_{ii}^s}{\bar{\rho}} = 2\epsilon_s \left(1 + \frac{3}{2}C_0 + 2\alpha_1\right) \quad (2)$$

Comme $\phi_{ii}^s = 2(\overline{p'd'})_s$, il vient

$$\frac{(\overline{p'd'})_s}{\bar{\rho}\epsilon_s} = \left(1 + \frac{3}{2}C_0 + 2\alpha_1\right) \quad (3)$$

soit encore:

$$\alpha_1 = \frac{(\overline{p'd'})_s}{2\bar{\rho}\epsilon_s} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right) \quad (4)$$

Dans le cas limite d'une turbulence incompressible le terme $(\overline{p'd'})_s$ s'annule et α_1^I s'exprime simplement selon [8]: $\alpha_1^I = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right)$. Ainsi α_1 et ϕ_{ij}^s peuvent être exprimés comme suit:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(\overline{p'd'})_s}{2\bar{\rho}\epsilon_s} + \alpha_1^I \\ \phi_{ij}^s - \frac{2}{3}(\overline{p'd'})_s \delta_{ij} &= \bar{\rho}\epsilon_s B_1 b_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

L'identification entre les modèles (1) et (5) permet d'exprimer B_1 de la manière suivante:

$$B_1 = 2\frac{(\overline{p'd'})_s}{\epsilon_s} + B_1^I, B_1^I = 4\alpha_1^I \quad (6)$$

D'une manière générale B_1^I est donné pour différents modèles linéaires. En situation de turbulence incompressible, on peut retenir la relation [8]: $B_1^I = -C_1$, où C_1 est une constante du modèle [1] de la partie de retour à l'isotropie. A partir des relations (5) et (6) nous obtenons facilement l'expression de ϕ_{ij}^s :

$$\phi_{ij}^s - \frac{2}{3}(\overline{p'd'})_s \delta_{ij} = -(C_1 - 2\frac{(\overline{p'd'})_s}{\bar{\rho}\epsilon_s})\bar{\rho}\epsilon_s b_{ij}$$

soit encore:

$$\phi_{ij}^{s*} = -(C_1 - 2\frac{(\overline{p'd'})_s}{\bar{\rho}\epsilon_s})\bar{\rho}\epsilon_s b_{ij}$$

Enfin, le modèle de Launder, Reece et Rodi corrigé pour exprimer la corrélation pression-déformation se présente sous la forme générale suivante:

$$\phi_{ij}^{s*} = -(C_1 - 2\frac{(\overline{p'd'})_s}{\bar{\rho}\epsilon_s})\bar{\rho}\epsilon_s b_{ij} + C_3 \bar{\rho} k [b_{ik} \tilde{S}_{jk} + b_{jk} \tilde{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} \tilde{S}_{mn} \delta_{ij}]$$

$$+C_4\bar{\rho}k[b_{ik}\tilde{\Omega}_{jk} + b_{jk}\tilde{\Omega}_{ik}] + C_2\bar{\rho}k\tilde{S}_{ij} \quad (7)$$

Dans cette étude, nous nous limitons aux modèles selon les quels $(\overline{p'd'})_s$ est proportionnel au taux de dissipation solénoïdale, parmi ces modèles, nous choisissons celui développé par Sarkar [9].

$$(\overline{p'd'})_s = \bar{\rho}\alpha_3 M_t^2 \epsilon_s$$

3. SIMULATION NUMERIQUE D'UNE COUCHE DE MELANGE COMPRESSIBLE A L'AIDE D'UN MODELE AU SECOND ORDRE

Les hypothèses de couche limite étant retenues. Le mouvement moyen est supposé stationnaire, les équations régissant le développement d'une couche de mélange compressible se présentent comme suit.

équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{V})}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\bar{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} + \bar{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial y} = -\frac{\partial(\bar{\rho}\widetilde{u''v''})}{\partial y} \quad (9)$$

équation de conservation de l'énergie

$$\bar{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} + \bar{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y} = -\frac{\partial(\bar{\rho}\widetilde{T''v''})}{\partial y} \quad (10)$$

$$\bar{\rho}\widetilde{T''v''} = -C_T\bar{\rho}\frac{\epsilon_s}{k}\widetilde{v''^2}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}, \quad C_T = 0.25$$

équations de transport des tensions de Reynolds

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\widetilde{u''^2}}{\partial x} + \bar{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\widetilde{u''^2}}{\partial y} &= -2\bar{\rho}\widetilde{u''v''}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y} - \frac{2}{3}\bar{\rho}\epsilon + \frac{\partial}{\partial y}(C_s\bar{\rho}\frac{k}{\epsilon_s}\widetilde{v''^2}\frac{\partial\widetilde{u''^2}}{\partial y}) + \phi^*_{11} \\ &\quad + \frac{2}{3}\overline{p'd'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\widetilde{v''^2}}{\partial x} + \bar{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\widetilde{v''^2}}{\partial y} &= -\frac{2}{3}\bar{\rho}\epsilon + \frac{\partial}{\partial y}(C_s\bar{\rho}\frac{k}{\epsilon_s}\widetilde{v''^2}\frac{\partial\widetilde{v''^2}}{\partial y}) + \phi^*_{22} + \frac{2}{3}\overline{p'd'} \\ &\quad (11) \end{aligned}$$

$$\bar{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\widetilde{w''^2}}{\partial x} + \bar{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\widetilde{w''^2}}{\partial y} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}\epsilon + \frac{\partial}{\partial y}(C_s\bar{\rho}\frac{k}{\epsilon_s}\widetilde{v''^2}\frac{\partial\widetilde{w''^2}}{\partial y}) + \phi^*_{33} + \frac{2}{3}\overline{p'd'}$$

$$\bar{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\widetilde{u''v''}}{\partial x} + \bar{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\widetilde{u''v''}}{\partial y} = -\bar{\rho}\widetilde{v''^2}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(C_s\bar{\rho}\frac{k}{\epsilon_s}\widetilde{v''^2}\frac{\partial\widetilde{u''v''}}{\partial y}) + \phi^*_{12}$$

équation du taux de dissipation

$$\tilde{\rho}\tilde{U}\frac{\partial\epsilon_s}{\partial x} + \tilde{\rho}\tilde{V}\frac{\partial\epsilon_s}{\partial y} = -C_{\epsilon_1}\tilde{\rho}\frac{k}{\epsilon_s}\widetilde{u''v''}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y} - C_{\epsilon_2}\tilde{\rho}\frac{\epsilon_s^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y}(C_{\epsilon}\tilde{\rho}\frac{k}{\epsilon_s}\widetilde{v''^2}) \quad (12)$$

Il est important d'indiquer que dans cette étude nous retenons les modèles de Sarkar[9] pour exprimer les termes de compressibilité ($\overline{p'd'}$: corrélation pression-dilatation et ϵ_c :taux de dissipation compressible):

$$\overline{p'd'} = \alpha_2 M_t \tilde{\rho} \widetilde{u''v''} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} + \alpha_3 M_t^2 \tilde{\rho} \epsilon_s$$

$$\epsilon_c = \alpha M_t^2 \epsilon_s$$

$$\alpha_2 = 0.15, \quad \alpha_3 = 0.2 \quad \text{et} \quad \alpha = 1.$$

4. PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

Il s'agit de simuler numériquement le développement d'une couche de mélange compressible dans deux cas relatifs à un nombre de Mach convectif ($M_c = 0.68, 1$) et de comparer les résultats numériques aux ceux de l'expérience effectuée par Goebel et al.[3].

Le modèle au second ordre est constitué des équations (8-12). Ces équations sont rendues sans dimension puis elles sont résolues numériquement à l'aide d'une méthode de différences finies entre deux stations différentes. Les profils initiaux sont ceux à la station initiale. Les calculs ont été effectués à partir d'une fermeture pour la corrélation pression-déformation utilisant le modèle classique de Launder et al sous sa forme corrigée (eq.(7)). Nous avons porté sur la figure 1 les résultats de calcul concernant la vitesse moyenne en aval du bord de fuite de la plaque est relativement bien représentée.

Les figures 2a, 2b, 2c et 2d représentent les résultats obtenus pour les intensités turbulentes l_{uu}, l_{vv}, l_{uv} et l_{ww} . Des écarts sont observés entre le calcul et l'expérience [3]. Les profils des composantes du tenseur de corrélation pression-déformations sont portés sur les figures 3a, 3b. Ces résultats montrent qu'il y a une réduction des termes de corrélation pression-déformation une fois le nombre de mach convectif augmente, comportement déjà confirmé par les simulations et les expériences de littérature.

En définitive, il apparaît que le modèle proposé est capable de fournir des résultats numérique reflétant assez bien les modifications apportées par les effets de la compressibilité. Ainsi, la diversité des cas traités en faisant varier le nombre de Mach convectif, peut relativement garantir une sûreté de prédiction des écoulements évoluant en présence d'une compressibilité significative.

CONCLUSION

La méthode de fermeture au second ordre que nous avons mise au point en vue de décrire l'évolution d'une couche de mélange compressible, fait partie d'un travail élaboré dans le but de concevoir des modèles capables de reproduire d'une manière relativement acceptable, les effets de compressibilité sur la turbulence. Le modèle proposé pour la corrélation pression-déformation a conduit à des résultats encourageants, comparés à ceux de l'expérience de Goebel et Dutton[3].

Ces résultats justifient que la corrélation pression-déformation est un terme très important dans le contexte de la modélisation au second ordre.

Toutefois, les résultats de simulation numérique obtenus, mettent en évidence des divergences par rapport aux mesures pour les intensités turbulentes. Ces résultats conduisent à penser que des effets de compressibilité dont l'origine n'est pas encore déterminée, ne semblent pas être pris en compte par la fermeture actuelle. Il reste néanmoins à valider le modèle proposé dans des configurations d'écoulements où la compressibilité est importante.

REFERENCES

- [1] S.K.Lele., "Compressibility effects on turbulence" *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol.26,p211(1994).
- [2] M.Samimy, G.S.Elliott., "Effects of compressibility on the characteristics of the free shear layers" *AIAA J.*,vol.28,p439(1990).
- [3] S.G.Goebel, J.C.Dutton., "Experimental study of compressible turbulent mixing layers" *AIAA J.*,vol.29(4),p538(1991).
- [4] C.G.Speziale and S.Sarkar., "Second order closure models for supersonic turbulent flows" NASA Langley Research Center ,Hampton,ICASE Report 91-9(1991).
- [5] A.M.El Baz, B.E.Lauder., "Second-moment modelling of compressible mixing layers" *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*,vol.2, pp63-72(1993).
- [6] A.Favre., "Equations des gaz turbulents compressibles,II Méthode des vitesses moyennes: méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique" *J.Méc.*,vol.4,pp390-421 (1965).
- [7] B.E.Lauder, G.J.Reece, W.Rodi., "Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure" *J.Fluid Mech.*,vol.68, p537(1975e).
- [8] S.B.Pope., "On the relationship between stochastic Lagrangian models of turbulence and second-moment closures" *Phys.Fluids A*, vol.6, p973. (1994).
- [9] S.Sarkar., "The pressure-dilatation correlation in compressible flow" *Phys.Fluids A*,vol.4(12),p2674(1992).

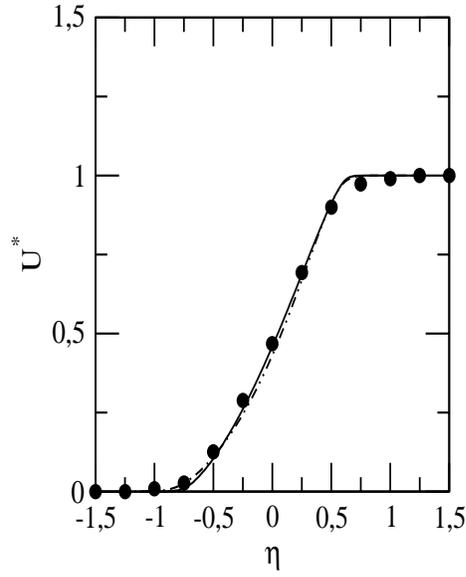
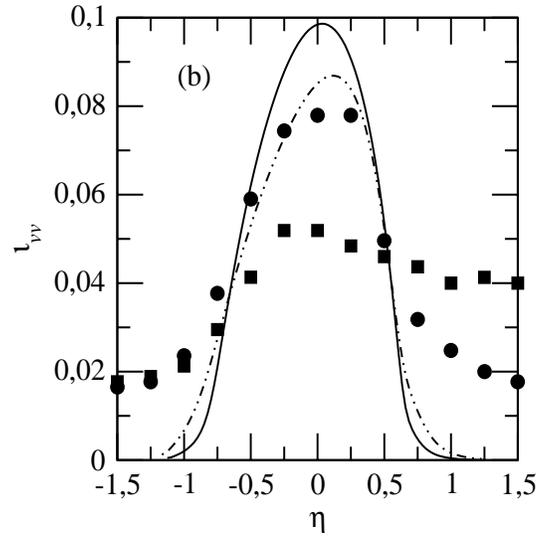
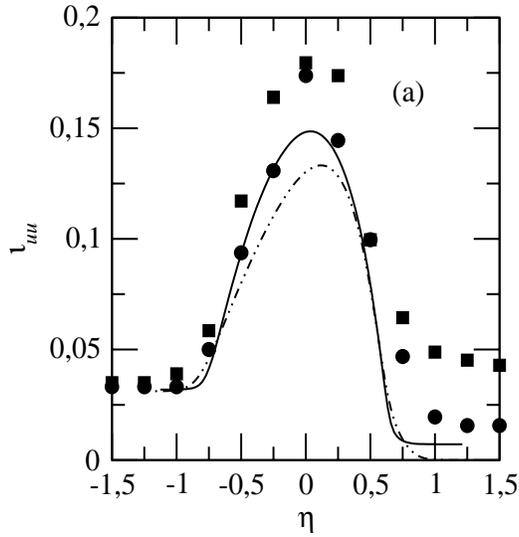


Figure 1: Profils de la vitesse moyenne $U^* = \frac{\tilde{U} - U_2}{U_1 - U_2}$: cercle experience de Goebel ($M_c=0.68, 1$), résultats de calculs (ligne: $M_c=0.68$, ligne pointillée: $M_c=1$)



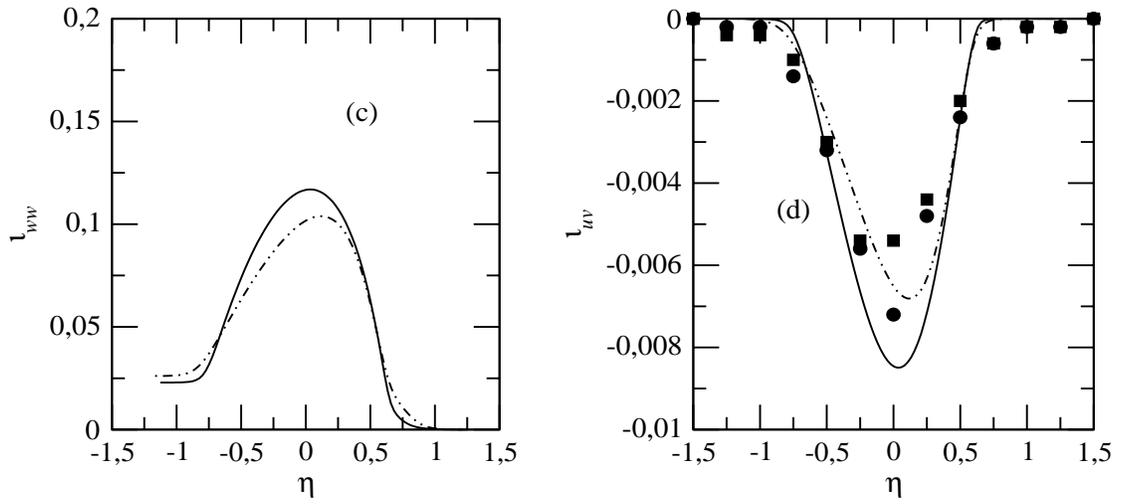


Figure 2: Profils des intensités turbulentes: expérience (cercle: $M_c=0.68$; carré: $M_c=1$), résultats de calculs (ligne: $M_c=0.68$; ligne pointillée: $M_c=1$)

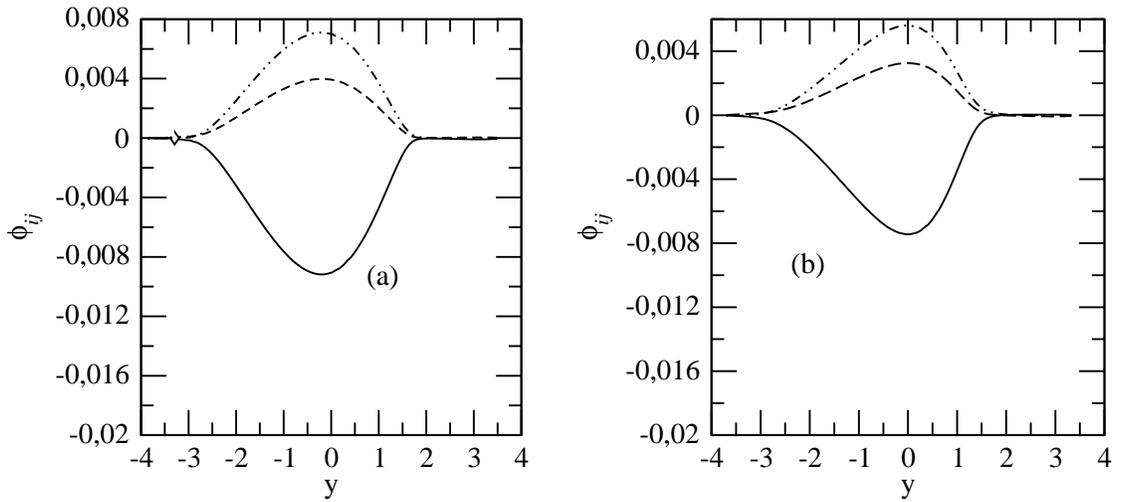


Figure 3: Profils des composantes du tenseur de corrélation pression-déformation: ϕ_{11}^* :ligne; ϕ_{22}^* :ligne discontinue; ϕ_{12}^* :ligne pointillée. (a): $M_c=0.68$, (b): $M_c=1$